



EDITORIAL

Ao término do mandato de quatro anos, parabenzamos os professores Mario Oliveira e Regina Moreth pela dedicação e seriedade com que conduziram esta grande engrenagem que constitui o Instituto de Matemática e Estatística da UFF. Como em todo processo democrático nosso Instituto vivenciou, em abril, o pleito para a escolha dos próximos diretor e vice-diretor e a Equipe do Programa *Dá Licença* gostaria de saudar e desejar aos professores eleitos Celso Costa e Paulo Trales os mais sinceros votos de um excelente trabalho, permeado de companheirismo, harmonia, compreensão e conquistas. Cabe a nós alunos, funcionários e professores estabelecermos uma parceria saudável e otimista com a nova direção afim de, cada vez mais, aprimorarmos a qualidade do trabalho desenvolvido neste Instituto. Que bons ventos soprem a favor de todos!

Este Número ...

... conta com dicas de sites, livros, etc. que envolvem matemática. Na seção *Falando Sério* quem nos brinda com uma interessante entrevista é a Prof^a Helena Cury. Na seção *Dicas de Veteranos* contamos com a aluna do 5º Período Mariana Peres. Na seção *Por onde Andam os Ex-alunos* quem nos fala é Ana Lattuca. Boa Leitura!



NOTÍCIAS DA DIREÇÃO

Caríssimos amigos!

Hoje, dia 20 de abril, é meu último dia como diretor deste instituto. Por quatro anos exerci essa função com uma constante atitude de respeito e atenção para com todos, buscando acima de tudo zelar pelo bem da instituição.

Nestes quatro anos assistimos a muitas mudanças. Até o nome do instituto mudou. Nosso Programa de Pós-Graduação em Matemática agora oferece o doutorado e nosso quadro docente está fortemente renovado. Tenho muita satisfação em acreditar que contribui para estes assim como para tantos outros processos.

Presidir as reuniões do colegiado da unidade nas quais foram distribuídas as vagas docentes, que não foram poucas, graças aos nossos esforços didáticos e às nossas ações em EaD, foi uma tarefa que acredito ter levado a cabo com excelente êxito.

Um sonho que parecia quase impossível realizou-se já nestes últimos meses: temos em funcionamento um

curso de mestrado para a formação de professores de Matemática na modalidade semipresencial. Para quem tem uma forte ligação com EaD, como é o meu caso, isto é motivo de grande júbilo.

Também no setor técnico-administrativo podemos observar mudanças. Os funcionários de carreira foram alocados de maneira mais adequada e hoje exercem suas funções com um nível de satisfação e contentamento bem maior do que o fizeram no passado. Além disso, o quadro de apoio, que tanto contribui para o bom funcionamento do instituto e para a nossa tranquilidade diária, hoje encontra condições muito mais satisfatórias.

Sei que há setores nos quais as mudanças esperadas ainda tardam. As condições físicas em que convivemos deixam muito a desejar. Gostaria, no entanto, de lembrar que este setor depende muito mais de outros fatores nos quais nossa atuação é menos efetiva. Refiro-me especialmente ao projeto de construção do prédio novo, que enfrentou um forte revés em seu andamento em função de problemas legais decorrentes do tipo de licitação que somos obrigados a adotar como instituição pública. De qualquer forma, não custa lembrar que no início de minha gestão nosso instituto tinha apenas um "direito a um espaço para a construção de um prédio no Campus da Praia Vermelha". Hoje há um espaço demarcado para isso, com uma firma contratada para elaborar o projeto executivo da obra, a partir de um estudo básico feito com a nossa colaboração, na forma de uma comissão. Além disso, a comunidade universitária reconhece o tamanho de nossa atuação dando-nos o direito de usar essencialmente todo o prédio de salas de aula que já está em construção ao lado do espaço que será ocupado pelo nosso prédio.

Uma questão que não consegui nem acessar como diretor e que muito me incomoda é a da quantidade de alunos que formamos. Eu entendo perfeitamente o discurso da qualidade (presume-se boa) de nossos formandos, mas a impressão deixada a cada uma das muitas cerimônias de formatura que presidi como diretor é a de que deveríamos fazer muito mais.

Outra questão intocada, mas que se faz mais soante a cada dia é a da reorganização departamental de nosso instituto. As contingências que traçaram essa nossa atual configuração já se perderam no tempo. No entanto, nós herdamos hoje uma distribuição que gera muitas distorções que precisam ser corrigidas.

Como podemos ver, há muito ainda a ser feito. Mas, como diz o ditado, a fila tem que andar. Desejo a nova direção uma gestão de muitas realizações e a todos outros, professores e funcionários do EGM, muito sucesso!

Abraços!

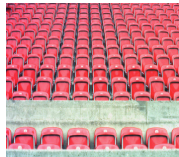
Mário Olivero



CADERNO DÁ LICENÇA

Coordenador: Prof José Roberto Linhares (GGM)

O caderno Dá Licença está com submissão de trabalhos aberta para o próximo número. Informações podem ser obtidas no site www.uff.br/dalicensa.



EVENTOS DÁ LICENÇA



Coordenadora: Prof^a Solimá Pimentel (GAN)

Não divulgados até o momento.



DICAS DA REDE



(1) Vale a pena conferir os vídeos da Videoteca Especial Matemática da TV Escola no endereço http://tvescola.mec.gov.br/index.php?option=com_zoo&view=item&item_id=5209

Sobre a TV Escola: a TV Escola é o canal da educação. É a televisão pública do Ministério da Educação destinada aos professores e educadores brasileiros, aos alunos e a todos interessados em aprender. A TV Escola não é um canal de divulgação de políticas públicas da educação. Ela é uma política pública em si, com o objetivo de subsidiar a escola e não substituí-la. E em hipótese alguma, substitui também o professor. A TV Escola não vai "dar aula", ela é uma ferramenta pedagógica disponível ao professor: seja para complementar sua própria formação, seja para ser utilizada em suas práticas de ensino. Para todos que não são professores, **a TV Escola é um canal para quem se interessa e se preocupa com a educação ou simplesmente quer aprender.**

(2) No site <http://www.mensa.com.br/> você vai encontrar informações sobre a **Mensa**. A Mensa é uma sociedade formada por pessoas de alto QI. Foi fundada em 1946 na Inglaterra e é hoje internacionalmente conhecida, com quase 100.000 membros em mais de 100 países. A idéia original era, e ainda é, criar uma sociedade apolítica e livre de distinções raciais ou religiosas, com o objetivo de fomentar a inteligência e promover o convívio de pessoas intelectualmente estimulantes. No Brasil conta com cerca de 300 membros. Para filiar-se a Mensa, a única exigência é ter um QI na faixa dos 2% superiores da população, comprovado por testes aplicados pela própria Mensa, ou reconhecidos por ela. São objetivos da Mensa: identificar e cultivar a inteli-

gência humana para o benefício da Humanidade, proporcionar um ambiente social e intelectualmente estimulante para seus membros e encorajar pesquisas sobre a natureza, características e usos da inteligência. Não deixem de visitar no site da Mensa o link "desafios".

(3) O **LABEM** dentre outras coisas realiza e divulga as ações e produções da área de Educação Matemática. No site <http://www.uff.br/labem/> você poderá encontrar artigos, links, projetos, datas de eventos.



Roberto José Medeiros Junior
Universidade Federal do Paraná
Programa de Pós-Graduação em Educação
Mestrado em Educação Matemática

A Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM elegeu o dia seis de maio "DIA NACIONAL DA MATEMÁTICA", em memória da data de nascimento de Júlio César de Mello e Souza, o MALBA TAHAN. Neste dia, fica a sugestão de promover, em todos os estados brasileiros a realização de eventos comemorativos, com o objetivo de difundir a Matemática como área do conhecimento, sua História, possíveis relações com as demais áreas; e de colocar em discussão algumas crenças sobre o ensino atual de Matemática.

Mas, afinal, quem foi MALBA TAHAN?

Natural do Rio de Janeiro, filho de professores, nascido em 6 de maio de 1895 e falecido em 18 de junho de 1974, aos 79 anos (Recife). No colegial, mostrou-se hábil em suas redações, as quais vendia para comprar chocolates. Manteve, ainda no colegial, o seu próprio jornal, o "Erre", com tiragem limitada a um único exemplar. Enquanto Professor Primário lecionou desde os 18 anos em escolas particulares, oficiais e profissionais – destaque para o Colégio Pedro II, no Rio de Janeiro. Formou-se Engenheiro (apesar do desejo do pai de que fosse militar) chegando ao Magistério Superior, tendo sido Professor Catedrático e Emérito. Seguiu pela carreira literária, em 1918, desejando publicar seus contos no jornal carioca, com o pseudônimo de "Slady". Em 1925, cria aquele que virá a ser um dos mais famosos nomes da Literatura Brasileira: el – hadji xerife Ali lezid Izz – Edim Ibn Salim Hank Malba Tahan (Crente de Allah e de seu santo profeta Maomé) que, apesar do notável conhecimento sobre o Oriente, não viajou para além da Argentina e Portugal. Em 1932, lança a mais conhecida de suas obras, "O Homem que calculava" traduzido para o espanhol, inglês, alemão, italiano e esloveno. Em seus 50 anos de atividade literária publicou 120 livros, dos quais 51 referentes à Matemática. Dentre as obras de ficção destaque para "A Sombra do Arco-Íris", seu romance preferido. Malba Tahan desenvolveu uma

pedagogia modelo em Matemática. Baseado em atividades lúdicas e imaginativas, sobretudo por meio de personagens “árabes”, popularizou e tornou recreativa a Matemática – que era considerada privilégio de poucos. Educador à frente de seu tempo, era contra o ensino exclusivamente teórico e expositivo e ironicamente, dizia que o matemático sente prazer em complicar tudo. Não dava nota zero nem reprovava – “Por que dar zero se há tantos números?”. Já há 50 anos, em seu livro “Didática da Matemática”, existiam claros indícios de tendências em Educação Matemática, o jogo e recreações como mote de aprendizagem, aplicação de problemas interessantes, a redescoberta da Matemática e a narração de histórias. Em 1958, em mais um indicio de sua atualidade com relação às propostas de ensino, sugere que, no Ensino Fundamental, se introduzissem noções de probabilidade, topologia, estatística e estimativa, bem como o uso da calculadora. Tais recomendações são lançadas, oficialmente, 30 anos depois nos Estados Unidos pelo NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) e, no Brasil, somente virá a ser contemplado em 1998, com os PCN. Malba Tahan também ficou conhecido pelas suas críticas referentes ao ensino de Matemática, as quais denominava o “inútil da Matemática”, as “noções parasitárias”, ou seja, aquilo que não deveria tomar o tempo das aulas de Matemática: as contas com números astronômicos, critérios de divisibilidade por sete (e de outros números primos grandes), prova dos nove, expressões aritméticas, raiz cúbica e demonstrações extensas e complicadas. As críticas estendiam-se a questões que apresentavam enunciados absurdos e fora de qualquer contexto cotidiano.

Pessoa marcante em âmbito internacional, gerações alimentaram-se de sua pesquisa e inovação. Assim sendo, como maneira de se retribuir o que foi passado, para o Dia Nacional da Matemática, sugerem-se atividades diversas de cunho científico e cultural, desde gincanas, jogos e até oficinas, relatos de experiências, palestras e debates sobre Matemática e Educação Matemática. Em especial, a aplicação de problemas que tenham como foco principal a leitura na forma de narrativas ou histórias matemáticas para fomentar a descoberta e a investigação. Além, é claro, dos problemas apresentados no livro “O Homem que calculava” de Malba Tahan e os do livro “Calvin o Detetive – Crimes e Mistérios que só a Matemática resolve”, de Bill Wise, Ed. Melhoramentos.

Fontes Consultadas:

LORENZATO, S. *Malba Tahan, um precursor*, Revista da SBEM nº 16, ano 11, maio de 2004, p. 63-70.

TAHAN, M. *O Homem que calculava*. Rio de Janeiro: Record, 53ª ed., 2001.

Sites consultados:

http://www.champ.pucrs.br/matema/malba_tahan.htm acessado em 27/04/05;

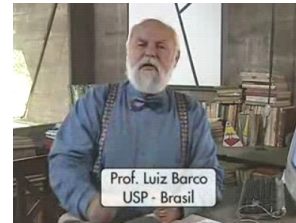
<http://www.geocities.com/g10ap/matematicos/mat27.htm> acessado em 28/04/05;

<http://www.clinicadematematica.com.br/Tahan.htm>, acessado em 28/04/05;

<http://www.matematicahoje.com.br/telas/cultura/historia/educadores.asp?aux=A>, acessado em 28/04/05.



DESAFIOS



Luiz Barco, professor da USP e um dos maiores divulgadores da matemática do país, mostra alguns dos desafios de lógica mais marcantes de sua vida.

Lembro-me que o poeta português Fernando Pessoa fala com frequência sobre a criança que guardamos dentro de nós: “(...) em que desvão da história deixei o menino que fui?” Teimo em discordar. Nunca o deixamos, apenas permitimos que ele adormeça. Toda criança (a que fomos e a que ainda somos) gosta de segredos e quase todas guardam com carinho alguém que as iniciou na arte de desvendar mistérios. No meu caso foi um professor de matemática, Pedro Gamballe. Ele chegou e já em nossa primeira aula da quinta série nos passou o desafio número 1. Olha só:

Problema 1:

Meu professor desenhou no quadro-negro – que, aliás, era azul – três caixas, cujas tampas tinham as etiquetas: PP, PB e BB. “Quando eu vinha para cá resolver trazer essas caixas”, nos disse. E prosseguiu: “Uma contém duas bolas pretas (PP), outra, uma preta e uma branca (PB) e a terceira duas brancas (BB)”. Tomou um fôlego, nos olhou sorridente, e lançou: “Um colega brincalhão, aproveitando-se da minha distração, trocou todas as tampas. Então eu gostaria que vocês me ajudassem a descobrir onde estão, respectivamente, as bolas. Para isso imaginem que só se pode retirar uma bola de cada vez, sem olhar aquela que resta na caixa. Qual é o menor número de bolas, e de qual caixa ela deve ser retirada para que se possa colocar as tampas nas caixas correspondentes?” Bem, caro leitor, veja como você resolve essa pequena charada. Use a imaginação, e, se não conseguir pergunte à criança que há em você. Gostou desta? Então resolva essa aqui abaixo.

Problema 2:

Um jovem recebeu sua mesada em moedas (todas) de 1 real.

a) Gastou a metade da mesada na compra de um boné do seu clube preferido, e, a seguir, deu 1 real de gorjeta;

b) Do restante, gastou a metade em um lanche e ainda deu duas moedas de 1 real ao garçom;

c) Do novo resto gastou a metade na compra de uma revista, e, da outra metade, gastou 3 reais em refrigerantes.

Pronto. Depois de tudo isso ele ficou com uma única moeda de 1 real. Agora, presumindo que ele não tenha trocado nenhuma das moedas, pergunta-se: qual foi o valor da mesada?

Respostas dos desafios na próxima edição!



DICAS DE LIVROS



1) O Teorema do Papagaio

Um thriller da história da matemática. Autor: Denis Guedj. Editora: Cia. das letras.

Em uma de suas perambulações pelo Mercado das Pulgas, em Paris, Max, garoto durão de onze anos, salva um papagaio das garras de dois capangas. No mesmo instante, na casa de Max, na Rue Ravignan, o senhor Ruche, dono da livraria *As Mil e Uma Folhas*, recebe uma carta de um amigo dos velhos tempos, ex-companheiro de Sorbonne que lutou ao seu lado na Segunda Guerra e depois desapareceu sem dar notícias. Na carta, Elgar Grosrouvre diz viver desde o fim da guerra em Manaus, onde montou a maior biblioteca da matemática do mundo, e avisa ao estupefato senhor Ruche que em breve ele receberá todos os preciosos livros da biblioteca – um verdadeiro tesouro escondido nas selvas brasileiras.

Como os moradores da casa da Rue Ravignan farão para organizar a magnífica Biblioteca da Floresta? Por que Grosrouvre mandou o fabuloso presente, depois de passar meio século reunindo obras tão raras? Que segredos ele desvendou no meio da selva? O suspense ganha mais um elemento com a presença do papagaio de Max: que mistérios se ocultariam na memória daquela ave, batizada com o nome punk de Nofutur? E por que aqueles sujeitos com pinta de mafiosos se interessam tanto por ela?

É com base nesses problemas que vai se equacionando O teorema do papagaio, que conta com um enredo repleto de coincidências enigmáticas e paralelismos surpreendentes – pois é na história da matemática que nossos heróis descobrem as pistas para desvendar a trama do livro. Em meio ao mistério que acompanha os personagens tanto em Paris como na Sicília, no Brasil e no Japão, o leitor também se vê instigado a enfrentar o maior desafio que se apresenta aos moradores da Rue Ravignan: compreender e organizar a história da matemática e suas diversas disciplinas.

De modo saboroso e muitas vezes pitoresco, o autor narra as vidas dos maiores matemáticos do mundo e expõe suas teorias. Tales e Pitágoras, Omar Khayyam e al-Khuwarizmi, Euclides e Arquimedes, Fermat e Euler, Tartaglia e Fibonacci, Pascal e Bhaskara são apenas alguns dos presentes neste livro, que revela toda a poesia dessa que é “a mãe de todas as ciências”.

2) O Caderno Secreto de DESCARTES

Um mistério que envolve filosofia, matemática, história e ciências ocultas. Autor: Amir D. Aczel. Editora: Zahar.

René Descartes (1596-1650) foi uma das figuras mais importantes da filosofia e da matemática ocidentais. Seu dito “Penso, logo existo” marcou o nascimento da relação entre a mente e o corpo. A criação do sistema de coordenadas cartesianas tornou possível descrever numericamente a posição de um ponto no espaço e tem uma quantidade imensa de aplicações em nossas vidas até hoje – diagramas e mapas de todo o tipo, tecnologia da computação, fotografia digital, imagens e documentos enviados pela internet, vôos especiais, etc.

Havia, porém um lado místico e misterioso em Descartes, acreditando-se que tenha pertencido à Ordem Rosa-Cruz. Além disso, ele manteve um caderno secreto de notas, escrito em código. Qual era o conteúdo desse caderno? O que ele estava querendo esconder.

Depois da morte de Descartes, Leibniz – o filósofo inventor do cálculo e um dos maiores gênios matemáticos de todos os tempos – mudou-se para Paris à procura do caderno secreto. Obteve permissão para copiar apenas duas páginas. Leibniz, espantosamente, decifrou o código no ato, mas manteve o segredo. Só em 1987, após tentativas de diversos estudiosos, um matemático francês, o padre Pierre Costabel, desvendou o código.

O Caderno Secreto de DESCARTES é um misto de biografia e aventura investigativa. Envolve ciências ocultas, uma fraternidade secreta, controvérsias religiosas e políticas e uma caixa trancada com escritos não publicados. Retrata ainda a infância de Descartes, sua formação privilegiada e os encontros com filósofos e matemáticos que influenciaram seu pensamento. O autor investiga também as circunstâncias suspeitas da morte do filósofo, que pode ter sido motivada por inveja.

Sobre o Autor: Amir D. Aczel é PhD em matemática e estatística e professor de Bentley College, Massachussets. É autor de diversos livros, dentre eles *O Último Teorema de Fermat* e *Bússola: a Invenção que Mudou o Mundo* (publicado no Brasil por Jorge Zahar Editor).

3) Matemática das Coisas

Editado em inglês pela Springer e publicado a 26 de Novembro de 2010



A Springer, a editora de obras científicas mais prestigiada do mundo, publica “A Matemática das Coisas”, de Nuno Crato, na versão inglesa. O livro, uma obra originalmente publicada numa parceria SPM/Gradiva, ganhou nesta edição o nome *Figuring It Out – Entertaining Encounters with Everyday Math*.

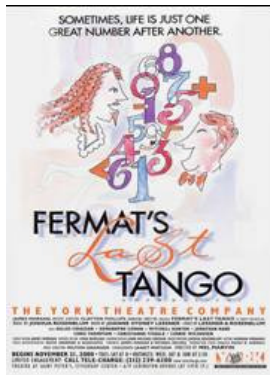
A Matemática das Coisas foi editado em 2008 em Portugal, pouco após o seu autor ter sido galardoado pela Comissão Europeia com o segundo lugar do prêmio de Divulgador Científico do Ano. Trata-se de uma coletânea de textos sobre a forma como a matemática faz parte do nosso dia-a-dia e está presente na arte de Pollock e Escher, no cortar o Bolo-Rei ou na procura do caminho de casa.

No livro, o leitor encontra histórias de vilões que procuram roubar segredos, de heróis que codificam as suas mensagens ou de matemáticos que passam séculos à procura da melhor forma de empilhar laranjas. Mas também histórias de confusões nas auto-estradas por não se seguirem regras da geometria cartesiana, de trapalhadas nos trocos por se ignorarem paradoxos antigos ou de erros nos calendários por se desconhecerem boas regras de aproximação numérica. São histórias da beleza e do poder da matemática. Trata-se, em suma, de um livro em que Nuno Crato revela, num estilo a um tempo cativante e rigoroso, a matemática em ação, contada de forma que todos a compreendam e que por ela se apaixonem.



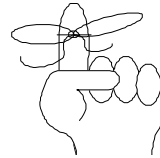
CURIOSIDADES

O ÚLTIMO TANGO DE FERMAT



O Último Tango de Fermat (Fermat's Last Tango) é um musical sobre a descoberta de um grande teorema matemático, contando a história de Andrew Wiles, o matemático que espantou o mundo quando, em 1993, anunciou a solução para o Teorema de Fermat, o famoso problema matemático colocado por Pierre de Fermat em 1637. Este musical, que combina opereta, blues, pop, e, evidentemente, tango, estreou-se na Off Broadway, no New York City's York Theater, em Novembro de 2000, tendo ganho um Emmy.

O Clay Mathematics Institute vende um DVD do Fermat's Last Tango para o público em geral. Além do Musical o DVD contém uma entrevista com Andrew Wiles em maio de 2000. Acompanha o DVD um panfleto com a histórias do Último Teorema de Fermat.



DIVULGAÇÃO DE EVENTOS

- * **II CNEM – Congresso Nacional de Educação Matemática**
IX EREM – Encontro Regional de Educação Matemática
 Data: 07 e 10 de junho de 2011
 Maiores Informações: <http://www.unijui.edu.br/content/view/3668/3528/lang.iso-8859-1>
- * **IX Encontro Regional de Educação Matemática - EREM**
 Local: UNIJUÍ
 Data: 07 a 10 de junho de 2011
 Maiores Informações: <http://www.unijui.edu.br/content/view/3668/3528/lang.iso-8859-1/>
- * **III Seminário Internacional de Educação Matemática III SIEMAT**
 Local: UNIBAN (Universidade Bandeirante de São Paulo) Campus Marte
 Data: 21 a 25 de junho de 2011
 Maiores Informações: <http://www.uniban.br/siemat/>
- * **XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática**
 Local: CIAEM – UFPE
 Data: 26 e 31 de junho de 2011
 Maiores Informações: <http://xiii.ciaem-iacme.org/>
- * **XIV Encontro Baiano de Educação Matemática**
 Data: 27 a 29 de junho de 2011
- * **ICME-12**
 Local: Seoul – Coréia
 Data: 08 e 15 de julho de 2011
 Maiores Informações: <http://www.icme12.org/>
- * **PME 35**
 Local: Ankara – Turquia
 Data: 10 e 15 de julho de 2011
 Maiores Informações: <http://www.arber.com.tr/pme35.org/index.php/home>
- * **VI Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática**
 Data: 28 a 31 de agosto de 2011
- * **17º CIAED**
Congresso Internacional de Educação a Distância
 Data: 30 de agosto a 02 de setembro de 2011
- * **XI EPREM**
Encontro Paranaense de Educação Matemática
 Data: 15 a 17 de setembro de 2011
- * **ICMI Study 21 Conference**
 Local: Águas de Lindóia – SP
 Data: 16 e 20 de setembro de 2011
 Maiores Informações: <http://www.study-21-conf.fe.usp.br/>



REFLEXÃO

Na Matemática e no humor o absurdo é o mesmo

Artigo de Luiz Barco em que faz comentários sobre o estudo da matemática.

Tenho defendido a idéia de que fazer Matemática é algo que transcende os limites dos cursos formais. Muitos daqueles que se dizem refratários às matemáticas acabam expondo com muita clareza e logicidade suas idéias; extasiavam-se diante da beleza das artes, entendem relativamente bem os argumentos e os raciocínios claros, têm aguçado senso de humor, são, enfim, portadores do espírito matemático. Não são poucos os livros e artigos, hoje, que, sem tratar especificamente de questões da Matemática, são, sem dúvida, sobre esse tema.

Veza por outra surge um comentário de que interpretar bem ou ler bem é uma atividade de prontidão matemática ou que tocar uma peça de Bach é dedilhar sobre logaritmos. Mas, rara mesmo é a interpretação matemática do humor. Por isso, foi com algum espanto que vi no livro *Numeracy* (uma espécie de dicionário que contém pequenos comentários sobre tópicos da Matemática), de John Allen Paulos, um exemplo de raciocínio lógico-matemático em cima de um diálogo entre dois sisudos pastores: "Eu nunca dormi com minha esposa antes de nos casarmos", disse um deles e, arematando, perguntou ao outro: "E você?" "Não tenho certeza", respondeu o colega e completou: "Qual era mesmo o nome de solteira dela?"

Estava em meio a essa leitura, quando começou na televisão o programa Jô Soares. Estimulado pelo que havia lido, prestei muita atenção ao extraordinário humorista e, sem muito esforço, percebi na lógica de suas ponderações, na agilidade de seu raciocínio, na construção das relações que arquitetou, maior prontidão matemática do que aquela que se observa em muitos cursos ou aulas rotulados de Matemática. O entendimento da lógica correta, ou do modelo, ou da regra, ou mesmo da estrutura são essenciais para se perceber a incongruência de uma história ou de uma piada que ouvimos. Igualmente, é essencial dar toda a atenção à elegância, à sutileza e à força da prova matemática para poder apreciar, de fato, o que é realmente essa ciência. Embora os usos dos entendimentos e apreciações sejam completamente diferentes na Matemática e no humor, eles estão presentes em ambos.

Os matemáticos, por exemplo, utilizam como um de seus ardis a técnica da redução ao absurdo, para provar proposições. Para provar P , é suficiente admitir a negação de P e daí chegar a uma contradição ou a um absurdo. Os redatores de humor usam a mesma técnica quando iniciam uma história com uma premissa estranha – "O que poderia acontecer se..." – e então desenvolvem seu enredo pelo resultado de consequências absurdas. As contradições são muito frequentes em Matemática e têm sido utilizadas tanto para demonstrar proposições sérias quanto para se construir falácias matemáticas, ou seja, asserções surpreendentes, cheias de sutilezas que escondem erros. Imagine que um amante dos números declare que todos

eles (os números) são interessantes. Você talvez concorde que alguns números têm propriedades que os tornam interessantes, mas que existem outros que nada apresentam para serem assim classificados. Logo, a família dos números poderia conter duas classes: a dos interessantes e a dos desinteressantes.

O matemático dirá que na classe dos desinteressantes há um número que é o menor de todos. Mas, você há de concordar que ser o menor faz dele, justamente, um número interessante e, portanto, deveria mudar de classe. Ainda na classe desinteressante há um outro número que é o menor da família e pela mesma razão deveria mudar de lugar. E se assim continuarmos, não haverá número desinteressante. A meu ver, a postura e o prazer que os matemáticos encontram em suas pesquisas não são diferentes daquelas dos comediantes. Pode-se até dizer que o sorriso que se exhibe quando acontece algo de inesperado no encaminhamento de uma bela prova matemática é uma versão refinada de uma bela risada provocada pelo inesperado desfecho de uma boa piada.

**POR ONDE ANDAM OS EX-ALUNOS ...**

Quem nos conta o que anda fazendo ao longo dos anos é Ana Lucia Pessanha Lattuca ou Ana Lattuca para os mais íntimos (UFF 1984/1988)

Fiquei muito honrada em ser convidada pela nossa ex-professora de lógica e amiga Márcia Martins para deixar aqui o meu registro de passagem pela UFF. Hoje eu me sinto ao mesmo tempo "foragida" e "grata" pela área que me formei. O curso foi muito gratificante e "bonito"; bonito, no sentido de conhecer algo que não conhecia, pensando que sabia Matemática, descobri que esta ciência era muito maior do que eu imaginava. Ah! A Geometria! Era lindo "viajar" no espaço. E a Álgebra? Adorava! Saudades da Profª Leila. E a Lógica? Como era interessante fazer as deduções lógicas e "ilógicas".

Entrei para o curso no 2º semestre de 1984, passei pelas dificuldades de escolha de profissão. Como vários amigos particulares e de cursinho, pensei em medicina, economia, mas o gosto pela matemática e pela facilidade que tinha com a matéria foram me envolvendo.

No princípio, as coisas não foram tão fáceis. Análise I era o grande bicho papão da faculdade e os veteranos faziam o que podiam para colocar e promover um pânico maior ainda, mas felizmente, como diz o ditado, quem tem amigo tem tudo, um grande amigo, Íon, orientador da matéria e hoje professor me deu muitas aulas em domingos ensolarados e graças a Deus, a UFF como ele tem excelentes professores e que se comportavam como verdadeiros amigos.

Gosto de lembrar das Olimpíadas, do grito de guerra da Matemática. É MA, É TE, É MATICA, a torcida era animada, espero que ainda continuem sendo.

Durante o curso, dava muitas aulas particulares, fiz estágio na Petrobrás, e apesar do horário do curso, nos

primeiros semestres, dependendo do dia, tinha aula às 10h da manhã e só terminava às 10h da noite.

Fiz curso de análise na PUC, me interessava pela área de programação e análise, e a vida foi me colocando em caminhos interessantes. Já divorciada em 1994 e com um filho de 2 anos, comecei a fazer concursos públicos para outras áreas de nível superior.

Passei para a Secretaria Municipal de Fazenda e para o Previ-Rio, onde estou a 18 anos. Sempre procurei trabalhar em setores em que a Matemática estava presente: Gerência de Informática, folha de pagamento.

Fiz Pós-Graduação em Administração Pública, pois temos um plano de cargos que nos permite crescer.

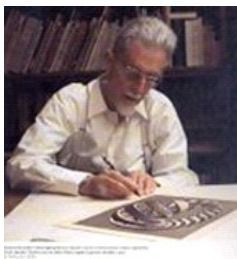
Não posso reclamar da vida. A vida é realmente bela, temos que saber aproveitar o que ela nos oferece, com muito bom humor e felicidade.

Por fim, agradeço a oportunidade de registrar a minha passagem pela UFF.

Um grande beijo a todos da UFF e em especial aos alunos e professores da Matemática.



Escher e a tira de Moebius



MAURITUS CORNELIS
ESCHER

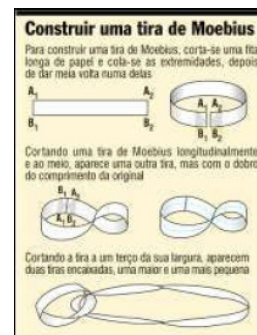
MAURITUS Cornelis Escher (1898-1972) estava fascinado pelos mistérios visuais. O encanto da sua arte deriva, em grande parte, da sua habilidade em captar o significado profundo de princípios geométricos e matemáticos. É o caso das suas gravuras de tiras de Moebius.

«Em 1960», escreveu Escher, «um matemático inglês (de cujo nome agora não me recordo) sugeriu-me que fizesse uma gravura de uma tira de Moebius. Na altura, nem sabia bem do que se tratava». O resultado foram duas gravuras que se tornaram famosas, a «Tira de Moebius I» e a «Tira de Moebius II», que aqui reproduzimos. Na primeira dessas gravuras, que parece retratar três serpentes mordendo as caudas umas das outras, Escher desafia-nos a seguir o percurso das serpentes e a verificar, naturalmente com surpresa, que os três répteis estão alinhados num percurso único, apesar de parecerem seguir duas órbitas

distintas. Na segunda dessas gravuras, em que nove formigas se passeiam, caminhando sempre no mesmo sentido, Escher desafia-nos a seguir o seu percurso e a verificar que é um percurso sem fim, pois de onde quer que se parta volta-se sempre ao mesmo lugar. As formigas passeiam-se, ao que parece, em dois lados diferentes de uma superfície, mas cada uma delas percorre, afinal, toda a superfície em que se passeia. Tanto numa como noutra gravura, o caminho não tem fim.



AUGUST FERDINAND
MOEBIUS



Ambas as gravuras reproduzem o que hoje se designa por tira de Moebius, em honra do seu descobridor, um matemático e astrónomo alemão que deixou trabalhos importantes em geometria, topologia e análise complexa. O seu nome, Moebius, escreve-se em alemão com um trema sobre o «o» e sem «e». Outras línguas, por não utilizarem esse trema, substituem o «ö» por um «oe». O som corresponde à vogal do francês «feu», um som entre o «ê» e o «â», pelo que é menos errado ler-se «mâbius» do que «mó-é-bíus», como muitas vezes se ouve.

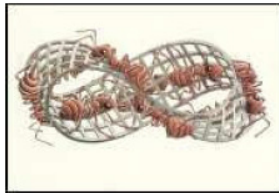
August Ferdinand Moebius nasceu em 7 de Novembro de 1790 em Schulpforta, na Saxônia, perto de Leipzig e de Iena. Morreu em 1868 em Leipzig, depois de ter sido, durante quase toda a sua vida adulta, professor de Astronomia na universidade dessa cidade. No princípio da sua vida matemática, trabalhou com Carl Friedrich Gauss (1777-1855), um dos maiores matemáticos da História e o único, até hoje, a receber a designação de «príncipe dos matemáticos». Concluiu os seus estudos com uma tese sobre a ocultação de estrelas e, tal como muitos cientistas da época, dedicou-se tanto à astronomia como à matemática. No decurso da sua vida, a matemática na Alemanha transformou-se por completo. Quando nasceu, era difícil encontrar um único matemático alemão de estatura internacional. Quando morreu, a Alemanha era um dos principais centros de investigação e de ensino da matemática, de onde partia uma influência decisiva para a ciência de todo o mundo. Moebius participou nesse extraordinário desenvolvimento, que não é estranho à transformação política e social então operada nesse país. Foi durante esse período que o mundo de fala alemã deixou de ser um conglomerado de estados, passando a ser um império, unido sob a égide da Prússia.

Entre os matemáticos, Moebius é, sobretudo conhecido pela transformação que tem o seu nome, e que desempenha um papel relevante em análise complexa. É também conhecido por vários trabalhos de geometria e topologia, um ramo das matemáticas que é, em muitos aspectos, uma generalização da geometria.



Nos seus estudos de topologia, Moebius estava interessado numa propriedade das superfícies, que é a da possibilidade ou impossibilidade de orientação e construiu a superfície não orientável que se veio a chamar tira de Moebius. Para o fazer, teve literalmente de trocar as voltas a uma superfície.

Uma folha de papel tem dois lados e um bordo único, constituído pelas arestas. Será que uma folha de papel pode ter um único lado e um único bordo, de tal maneira que uma formiga possa passar de um lado para o outro, sem nunca cruzar o bordo? Sabe-se hoje que sim, que basta dar meia volta numa das extremidades da folha e colar essa aresta à aresta oposta, tal como se mostra na caixa abaixo. Na superfície resultante, a tira de Moebius, as formigas podem passear-se continuamente, parecendo que percorrem as duas faces da tira, passando da frente para as costas, quando, afinal, apenas percorrem a face única deste estranho objeto. A tira de Moebius não tem frente nem costas.



Imagine-se um ser a duas dimensões, embebido na tira, em vez de se passear sobre ela, tal como as formigas. Esse ser, quando dá uma volta à tira, muda a sua paridade, isto é, aparece como uma imagem invertida pelo espelho – fato que reflete o caráter não orientável desta superfície.

Construa-se uma tira de Moebius em papel transparente e escreva-se uma frase ao longo da tira, «sempre em pé», por exemplo. Mantendo a tira entre dois dedos, puxa-se por ela para a fazer dar uma volta completa. A frase «sempre em pé», ora nos aparece direita ora nos aparece invertida.

Corte uma tira, longitudinalmente, pelo meio. O que aparece é semelhante ao que Escher representou na sua gravura, com as serpentes a morder as caudas umas das outras. A tira não se divide, como se poderia esperar, continua a ser uma tira única. Estique a tira cortada, e esta aparece como uma única tira, mais fina e mais comprida.

Em vez de cortar a tira original pelo meio, pode-se cortá-la a um terço da largura. Depois de a tesoura percorrer a banda, aparecem duas tiras, uma maior e uma menor, encaixadas uma na outra.

Não é de espantar que a tira de Moebius tenha fascinado e continue a fascinar matemáticos, artistas e simples curiosos. Tem aparecido em selos de correio, em

esculturas, até em logotipos comerciais. O Banco Totta & Açores, quando juntou os dois bancos, escolheu uma tira de Moebius para representar a unidade das duas instituições originais: foram duas faces que se juntaram numa. Mas as melhores e mais imaginativas representações continuam a ser as de Escher. Um artista que conseguia ter uma intuição geométrica profunda dos objetos que desenhava.

Texto de NUNO CRATO



MATEMÁTICA
E
HUMOR

Newton, Pascal, Einstein, Aristóteles.

Newton, Pascal, Einstein, Aristóteles e vários outros cientistas importantes estavam no céu, quando um deles sugeriu que brincassem de esconde-esconde. Einstein começou a contar e todos se esconderam, menos Newton que desenhou no chão um quadrado com 1 metro de lado, onde ficou parado. Quando Einstein terminou de contar, perguntou para o Newton por que não havia se escondido ainda. O que ele respondeu?

– Eu não sou Newton, sou Pascal. ($Pa = N/m^2$).

Festa das funções...

As funções resolveram dar uma festinha. Várias funções apareceram, funções constantes, lineares, polinomiais e a exponencial que ficou meio fora de lugar porque não conseguia se integrar. Eis que do nada entra na festa o Operador Diferencial, vulgo derivada, que começa a atacar as funções. Encostava-se a uma função polinomial e 'puf' ela caía de grau, encostava-se a uma função constante e 'puf' ela sumia. Foi então que a exponencial tomou coragem para enfrentar o operador diferencial e disse: – Pode ir parando com isso agora! O senhor deve ir embora desta festa! – Quem é você para falar assim comigo sua atrevida? – perguntou a derivada. – Eu sou e^x , muito prazer. – Prazer, eu sou dy/dt . 'puf'.



DICAS DE VETERANOS

Quem nos brinda com suas sugestões é Mariana Felipe Peres (5º período).

Olá galera!!

Ingressei na UFF no 1º semestre de 2009, certa do que queria fazer.

No começo, fiquei um pouco estressada, cansada, não sabia lidar com tanta matéria, não tinha o costume de estudar diariamente, e aqui precisamos estudar todos os dias sem deixar a matéria acumular.

Descobri como é bom ter a companhia de quem tenha um objetivo semelhante ao seu. Estudar em grupo faz muita diferença, pois um ajuda o outro. Ir a monitores, confesso que não gosto; quando tenho dúvidas tento resolver com amigos, se não conseguir peço ajuda aos professores, caso eles não estejam, aí sim recorro aos monitores. Não digo que eles não sejam bons, vocês devem sim procurar os monitores, eles são capacitados.

Perder matéria não é a pior coisa do mundo. O que adianta passar e não aprender! Vamos ser professores, precisamos ter o domínio das matérias, mesmo aquelas que achamos que não vão servir. Ah! Não adianta querer pegar várias matérias e tentar adiantar o curso, isso só vai te enrolar. É melhor fazer apenas as que você tem certeza de poderá se dedicar.

Fiquem atentos às bolsas, leiam os murais.

Bom, isso é um pouquinho do que penso e queria compartilhar com vocês.

TROCANDO EM MIUDOS ...



Iniciando a Geometria com processos algébricos

INTRODUÇÃO:

Muitos estudantes de matemática desconhecem a geometria projetiva, que está presente tanto em aplicações como nas fotografias como em estudos teóricos da matemática, mas desde cedo usam as ferramentas do cálculo diferencial em tópicos de interesse geométrico como tangência e pontos singulares. Como primeiro passo para suprir esta lacuna apresentamos aqui um tratamento algébrico para curvas planas. Portanto, sem o uso de limite e introduzimos o plano projetivo real para estudar pontos singulares. As curvas que apresentaremos são determinadas por polinômios em duas variáveis sobre um corpo k , que pode ser \mathbb{R} ou \mathbb{C} e por isso denominada de curvas algébricas.

Algumas noções dependem da definição de um operador, dito 'derivação', que permite obter interpretações substanciais sem referência a limite de funções. A interseção de duas curvas contém a noção de tangência e pontos singulares e em geral, tem um número finito de soluções. No entanto, um fenômeno acontece: no caso finito, quando o número de soluções não é o produto dos graus, sentimos que faltam soluções. O problema foi estudado e resolvido, resultando em dois completamentos, um algébrico (construção do corpo algebricamente fechado dos números complexos \mathbb{C}) e num espaço geométrico denominado *projetivo*, onde duas retas sempre se interceptam. Para isso, esclareceu-se o significado de pontos à infinita distância. Neste espaço, duas curvas algébricas se interceptam segundo o produto dos graus. Assim, dois

círculos se interceptam em quatro pontos. Vejamos alguns casos simples de interseções.

(i) A reta $y = x$ intercepta o círculo $x^2 + y^2 = 1$ em dois pontos, enquanto que a reta $y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ tem

um ponto duplo com o círculo em $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Já no sistema

$y = x + 3$ e $x^2 + y^2 = 1$ não há interseções no gráfico real. O sistema tem duas soluções, dadas por $x = \frac{-3 + i\sqrt{7}}{2}$,

$y = \frac{3 + i\sqrt{7}}{2}$ e ainda o par $x = \frac{-3 - i\sqrt{7}}{2}$, $y = \frac{3 - i\sqrt{7}}{2}$.

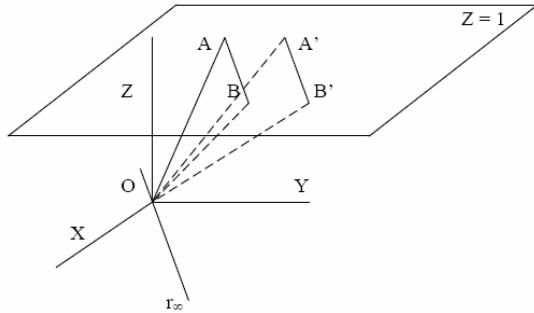
Tomamos então as curvas no anel $\mathbb{C}[x, y]$. Não podemos visualizar as interseções (de fato, o gráfico estaria em \mathbb{R}^4), mas recuperamos a questão dos produtos dos graus com o completamento algébrico já que em \mathbb{C} todo polinômio de grau n tem n raízes (distintas ou não). Por outro lado, necessitamos de um completamento geométrico. Isto é dado pelo espaço projetivo. É o que veremos a seguir.

(ii) O ponto no infinito.

A interseção de duas retas paralelas como $2x + 3y = 1$, $2x + 3y = 3$ e da reta $x = y$ e com a hipérbole $y^2 - x^2 = 1$ é vazia, e não adianta recorrer ao corpo dos números complexos. Para lidar com esta afirmação é necessário dar significado matemático ao ponto no infinito. Este tratamento teve inspiração na solução artística dos pintores renascentistas, que tentavam pintar telas 'segundo o modo como vemos as coisas'. Quando olhamos os trilhos de um trem num trecho longo, ou mesmo as margens de uma estrada, temos a impressão que os trilhos, assim como as margens se encontram. Essa é nossa maneira real de enxergar. Vemos as coisas segundo uma 'perspectiva central'. Imagine uma tela de pintura, e sobre ela tentemos representar os objetos como vemos naturalmente. Vamos assumir o papel de um observador, como nos reduzíssemos a um ponto. Pensemos nossa posição estando na origem de \mathbb{R}^3 . Ao marcar um ponto sobre a tela, estamos formando um

segmento de reta no espaço que parte da origem O e tendo por extremidade o ponto da tela. Se o ponto que queremos representar está antes da tela ou depois da tela, mas no mesmo 'raio visual' formará o mesmo ponto na tela. Então um ponto para nós será uma reta (um raio visual) no espaço. Se considerarmos dois pontos na tela, teremos a reta formada na tela, e um plano no espaço, contendo a reta e passando pela origem. Os pontos da tela serão denominados de pontos afins, enquanto as retas pela origem e que interceptam a tela serão chamadas de pontos projetivos. Convencionemos que a tela é o plano $Z = 1$. Este plano corresponde a uma cópia do plano euclidiano. Consideramos os eixos coordenados X, Y, Z . Na figura temos quatro pontos 'finitos' ou 'afins', que são os pontos A, B, A' e B' , quatro pontos projetivos, que são as retas pela origem OA, OB, OA' e OB' . Os planos OAB e $OA'B'$ se interceptam segundo uma reta r_∞ que passa pela origem e está no plano $Z = 0$. Isto nos leva a considerar r_∞ como a direção das

retas AB e A'B'. Assim r_∞ faz o papel de um ponto de interseção destas retas.



Este é um modo de apresentar o plano projetivo real. Podemos afirmar agora que duas retas sempre se interceptam. A interseção é um ponto finito ou afim se não possuem a mesma direção, ou então as retas são paralelas e se encontram no ponto no infinito r_∞ . A seguir, vamos operacionalizar esta concepção.

(iii) Curvas Afins e Curvas Projetivas.

Vimos que um ponto no plano projetivo significa uma reta pela origem no \mathbb{R}^3 . Excluímos a origem coordenada $(0,0,0)$, pois corresponde ao observador. Dispomos assim dos pontos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^{3*} = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$. Dois pontos (x,y,z) e (x',y',z') estão no mesmo raio visual, ou seja, na mesma reta pela origem, se, e só se existe um número real não nulo tal que $(x,y,z) = \lambda(x',y',z')$. Esta relação entre pontos do \mathbb{R}^{3*} é uma relação de equivalência. A classe de equivalência de um ponto (x,y,z) será indicada por $(x:y:z)$. Isto é sugestivo, pois dois pontos como $(2,4,6)$ e $(1,2,3)$ estão no mesmo raio visual, ou seja, $(2:4:6) = (1:2:3)$ são o mesmo ponto projetivo. Note que se $Z \neq 0$, só existe um ponto (X,Y,Z) tal que $(x,y,1) = (X,Y,Z)$. Pela propriedade dos ternos ordenados temos $x = \frac{X}{Z}$ e $y = \frac{Y}{Z}$. Qual é o ponto no infinito da reta $z=1, 3x+2y=1$ de \mathbb{R}^{3*} ? (note que esta reta está contida na tela, ou seja, no plano $z=1$). Podemos por então $x = \frac{X}{Z}$, $y = \frac{Y}{Z}$ e entrar na equação da reta, obtendo $3X+2Y=Z$. A reta dada e a origem formam um plano. Vamos interceptá-lo com o plano $Z=0$, que é o plano que contém todos os pontos no infinito (um ponto no infinito é uma reta pela origem contida no plano $Z=0$). A interseção é a reta $Z=0, 3X+2Y=0$, que é um ponto no infinito e sua expressão é $(-1:-\frac{2}{3}:0)$. Note que uma reta é paralela a $3x+2y=1, z=1$ se, e só se for paralela a $3X+2Y=0, Z=0$. Este processo é denominado de homogeneização de uma curva.

Homogeneizando a hipérbole $y^2-x^2=1, z=1$ obtemos a curva projetiva $Y^2-X^2=Z^2$. Fazendo $Z=0$, obtemos os pontos no infinito da hipérbole dada. As

condições $Z=0, X=\pm Y$ mostram que a hipérbole tem dois pontos no infinito, a saber, $(\pm Y:Y:0) = (\pm 1:1:0)$. O leitor deve ter percebido que, sendo $x=\pm y, z=1$ as assíntotas da hipérbole dada, podemos interpretar que elas interceptam a curva no infinito. O leitor pode verificar que a parábola $y=x^2$ tem apenas um ponto no infinito. Por outro lado, perguntamos se existem pontos no infinito para o círculo $x^2+y^2=1$, já que a curva é fechada e de extensão finita. A homogeneização nos leva a $X^2+Y^2=Z^2$. Fazendo $Z=0$, obtemos a relação $X=\pm iY$, assim que os pontos no infinito do círculo dado são complexos. No caso, são os pontos $(\pm i:1:0)$. Por isso não temos a percepção de tais pontos no gráfico. Para fechar este item, vejamos que no plano projetivo só existe um tipo de cônica. Na geometria euclidiana, não há transformação que leve a elipse $4x^2+9y^2=36$ na hipérbole $y^2-x^2=1$. Mas isto ocorre no plano projetivo. Para mostrar isto, façamos as homogeneizações. As curvas projetivas $4X^2+9Y^2=36Z^2$ e hipérbole $Y^2-X^2=Z^2$ são as homogeneizações correspondentes e a transformação cuja matriz 3×3 tem linhas $\left[\frac{i}{2}, 0, 0\right], \left[0, \frac{1}{3}, 0\right], \left[0, 0, \frac{1}{6}\right]$ leva a elipse na hipérbole e sua inversa faz o inverso, pois ela é inversível. Não há espaço para demonstrar o caso geral, mas o exemplo serve para despertar a curiosidade do leitor para a diferença entre a geometria afim do plano e a geometria projetiva plana.

(iv) A interseção de uma curva com uma reta. Multiplicidade.

Para tratarmos da multiplicidade de raízes, definamos sobre $k[x]$ onde $k=\mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , um operador $D:k[x] \rightarrow k[x]$ denominado 'operador derivação' com as propriedades $D(f+g)=Df+Dg$, $D(cf)=cDf$ para $c \in k$ uma constante e $D(fg)=(Df)g+f(Dg)$. Temos então, $D(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = a_n n x^{n-1} + a_{n-1} (n-1) x^{n-2} + \dots + a_1$, para $n \geq 1$ e $D(c)=0$ se c é um polinômio constante. Em particular, $D(x^n) = nx^{n-1}$ para $n \geq 1$. Uma raiz $x=a$ de um polinômio $P(x)$ é dita dupla, se $P(a)=(DP)(a)=0$, ou seja, se a é raiz de ambos os polinômios $P(x)$ e $(DP)(x)$. Como exemplo, tomemos o polinômio $P(x)=x^4-5x^3+9x^2+2$. Temos $P(x)=(x-1)^3(x-2)$. Vemos que $DP(x)=3(x-1)^2 \cdot (x-2) + (x-1)^3$, de modo que $x=2$ é raiz simples, enquanto que $x=1$ tem multiplicidade ≥ 2 (no caso é raiz tripla). O conjunto $k[x]$ dos polinômios de uma variável é um domínio euclidiano: dados dois polinômios f e g (onde $g \neq 0$) em $k[x]$, existem polinômios h e r onde $\text{grau}(r) < \text{grau}(g)$ e tais que $f=gh+r$ ou $r=0$. Por exemplo, se $f(x)=x^4+2x^3-2x^2+3x-2$ e $g(x)=x^2+1$ então, para $h(x)=x^2+2x-3$ e $r(x)=x-1$ temos $f(x)=h(x)g(x)+r(x)$. Já o anel $k[x,y]$, que define as curvas algébricas não possui tal propriedade. Podemos dispor, no entanto, do resultado abaixo, que tem consequências interessantes.

Afirmção: Sejam f e g polinômios sem fatores irredutíveis em comum (um fator comum resulta numa infinidade de pontos comuns entre as curvas, o que não nos

interessa no momento). Existe uma relação $af + bg = c(x)$ onde $a, b \in k[x, y]$. Analogamente temos uma relação $uf + vg = w(y)$. **Consequências:** (a) A interseção de duas curvas algébricas sem componente comum é finita. De fato, os polinômios $c(x)$ e $w(y)$ possuem um número finito de raízes; (b) Se $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ não é curva constante então a curva algébrica $f(x, y) = 0$, possui infinitos pontos e por outro lado, existem infinitos pontos do plano \mathbb{C}^2 que não estão na curva.

Exemplo:

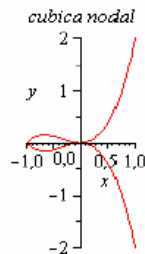
Sejam $f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4$ e $g(x, y) = -x^2 + y + 1$.

Pondo $a(x, y) = 1$, $b(x, y) = x^2 + y - 1$ e $u(x, y) = 1$, $v(x, y) = 4$, teremos $af + bg = x^4 + 2x^2 - 3$ e $uf + vg = y^2 + 4y$. As raízes de $y^2 + 4y = 0$ são 0 e -4 e as de $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$ são ± 1 , $\pm i\sqrt{3}$. Os pontos comuns são $(\pm 1, 0)$, $(\pm i\sqrt{3}, -4)$. O leitor pode conferir com o gráfico real observando as duas soluções $(\pm 1, 0)$.

Para definir multiplicidade de um ponto, lembremos o teorema de Taylor, que fornece o desenvolvimento de f no ponto P . A noção de derivada parcial é feita algebricamente. Se $f(x, y) = x^2y^3 + x + y$ então a derivada parcial em relação a x é $f_x(x, y) = 2xy^3 + 1$ e em y é $f_y(x, y) = 3x^2y^2 + 1$. Temos

$$f(x, y) = f(u, v) + f_x(u, v)(x - u) + f_y(u, v)(y - v) + \frac{1}{2!} (f_{x^2}(u, v)(x - u)^2 + 2f_{xy}(u, v)(x - u)(y - v) + f_{y^2}(u, v)(y - v)^2) + \dots$$

Suponha que o ponto é da curva. Então $f(u, v) = 0$. O ponto é de ordem m se alguma derivada de primeira ordem é diferente de zero. Se o ponto anula as derivadas primeiras, mas, alguma derivada de segunda ordem não é nula diremos que o ponto tem multiplicidade dois, ou ainda que o ponto é duplo. Segue nestes termos a idéia de multiplicidade. Indicamos em símbolos a multiplicidade de P em f por $m_P(f)$. No desenvolvimento de Taylor no ponto P , se m é o inteiro positivo para o qual alguma derivada parcial de ordem m é diferente de zero, os fatores lineares deste termo são as tangentes à curva no ponto P . Mostraremos dois exemplos. Tome a cúbica $f(x, y) = x^3 + x^2 - y^2$ e como ponto tome $P = (0, 0)$.



Note que o desenvolvimento de Taylor de f no ponto $P = (0, 0)$ é $x^3 + x^2 - y^2$ e assim, $m_P(f) = 2$. Os fatores lineares do termo do segundo grau dividem $x^2 - y^2$. Então as tangentes à cúbica nodal na origem são as retas

$y = x$ e $y = -x$. Isto caracteriza um nó. O leitor pode verificar que a cúbica $y^2 = x^3$ tem uma tangente dupla na origem (a saber, $y = 0$). Daí o nome desta cúbica ser *cúbica cuspidal*.

(v) A interseção de duas curvas algébricas.

Para finalizar nosso texto, tratemos de um sistema como o formado por f e g onde $f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4$ e $g(x, y) = -x^2 + y + 1$. Trata-se do sistema $4x^2 + y^2 - 4 = 0$ e $-x^2 + y + 1 = 0$. Consideremos os polinômios relativos à variável y . Sabemos ainda que existe um ponto comum entre as duas curvas. Vamos escrever três equações, completando os termos dos polinômios em graus decrescentes e multiplicando a segunda (a parábola) por y , pois não vai alterar o resultado e por outro lado, tornará a situação homogênea. Então reescrevemos o sistema como $y^2 + 0y + 4x^2 - 4 = 0$, $y^2 + y(1 - x^2) + 0 = 0$ e $0y^2 + y - x^2 + 1 = 0$.

Para haver solução, o determinante dos coeficientes deve ser zero. Assim o determinante de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4x^2 - 4 \\ 1 & -x^2 + 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x^2 + 1 \end{pmatrix} \text{ é zero, ou seja, } x^4 + 2x^2 - 3 = 0,$$

cujas raízes são $x = \pm 1, \pm i\sqrt{3}$. Segundo a parábola, os pontos são $(\pm 1, 0)$ e $(\pm i\sqrt{3}, -4)$. O determinante do sistema é denominado 'resultante de f e g '. Note a conclusão obtida, análoga a anterior, resolvida em termos mais clássicos de sistema.

(vi) Conclusão: apresentamos outro plano geométrico, o projetivo, onde tratamos algebricamente do ponto no infinito. Vimos o efeito na classificação das cônicas. Estudamos multiplicidade de pontos e interseção de curvas. O teorema de Bezout explica que, *o número de pontos da interseção de duas curvas, contadas as multiplicidades e elas estando em boa posição relativamente uma à outra, é o produto dos graus*. Esperamos ter despertado a curiosidade do leitor. Como referencia em português temos o livro de Israel Vainsencher, Introdução às curvas Algébricas Planas e o livro do alemão (traduzido para o inglês) G. Fisher, Plane Algebraic Curves, mas há uma literatura extensa. Lembremos que os recentes livros de Teoria dos Números que trazem um tópico de criptografia, tratam de curvas cúbicas.

Prof José Roosevelt Dias (GGM)



DÁ LICENÇA PARA O "BOM" PORTUGUÊS

Prof Paulo Trales (GAN)

Prezados alunos.

Na vida de docente você vai se deparar com problemas (como este do famoso Malba Tahan – ligeiramente modificado) que exigem certo domínio da língua

materna para inicialmente compreendê-lo, e posteriormente "matematizá-lo" e resolvê-lo. Há várias formas de "atacar" esse problema. Caso não consiga fazer essa questão em alguns minutos não fique chateado, pois esse não é realmente um problema trivial. Na internet há uma solução interessante encontrada pelo conhecido mestre!

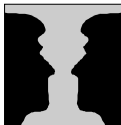
Um navio que partiu da Índia levando especiarias, teria sido destruído por uma tempestade, não fosse a bravura de três marinheiros, que no meio da tormenta manejaram as velas da embarcação com extrema perícia e competência. O comandante querendo recompensá-los colocou em um baú entre duzentas e trezentas moedas de ouro, de igual tamanho e peso, para que o almoxarife as repartisse entre eles no desembarque. No meio da noite um dos marinheiros acordou e pensou: "Será melhor que eu tire minha parte. Assim não terei que me desentender ou discutir com meus amigos". Foi silenciosamente até o baú onde se encontrava o dinheiro, dividiu-o em três partes iguais, mas notou que a divisão não era exata, pois sobrava uma moeda. "Por causa dessa mísera moeda é capaz de haver discussão e rixa entre nós. É melhor jogá-la fora". O marinheiro atirou então essa moeda ao mar e se retirou. Horas depois o segundo marinheiro teve a mesma idéia, dividiu o que encontrou no baú em três partes iguais, mas notou que sobrava uma moeda. Para evitar problemas atirou essa outra moeda ao mar. O terceiro marinheiro, ignorando a atitude tomada anteriormente pelos seus amigos, foi no final da madrugada no local onde se encontrava as moedas, dividiu a quantidade restante em três partes iguais, sobrando também uma moeda. Não querendo complicações jogou essa moeda ao mar e voltou com a terça parte seu para o seu leito.

No dia seguinte, por ocasião do desembarque, o almoxarife foi até o baú, dividiu a quantidade restante em três partes iguais dando a cada um deles uma dessas partes. Ainda dessa vez a divisão não foi exata, sobrava uma moeda, que o almoxarife guardou para si como pagamento pela sua tarefa. Nenhum dos marinheiros reclamou do seu montante, pois estavam convencidos de terem feito um grande negócio.

Pergunta-se:

- (i) Qual a quantidade de moedas que o comandante colocou no baú?
- (ii) Quantas moedas cada um dos marujos recebeu?

PS: No próximo número do nosso jornal apresentamos a solução.



FALANDO SÉRIO

Quem nos brinda com sua entrevista, dada ao Prof Carlos Mathias, é a Prof^a Helena Cury.

Dá Licença: *Cara Prof^a Helena Cury, é uma grande honra tê-la conosco no Jornal Dá Licença da UFF. Você é maior especialista brasileira na área de Análise de Erros. Como se deu o seu envolvimento com esta área de pesquisa da Educação Matemática?*

Helena Cury (HC): Prezado Prof Mathias, em primeiro lugar agradeço muito a oportunidade de trazer algumas ideias sobre análise de erros e sinto-me muito honrada com seu convite para essa entrevista virtual. Não me considero especialista em análise de erros, eu acho apenas que estava "no lugar certo, na hora certa". Explicando melhor: em 1986, eu estava fazendo leituras em Educação Matemática, para resolver o tema de minha pesquisa de mestrado. Em visita a São Paulo, tive oportunidade de conhecer a Prof^a Lucila Bechara, a quem expliquei minhas preocupações em encontrar textos da área, pois não conseguia material na UFRGS ou em bibliotecas de Porto Alegre (em uma época em que a única forma de compartilhamento de textos era o Comut). A Prof^a Lucila sugeriu-me conversar com o Prof Antonio José Lopes, o Bigode, que havia voltado há pouco tempo de um evento internacional, no Canadá, em que havia apresentado um trabalho pioneiro, sobre erros cometidos pelos alunos. Bigode me emprestou textos da Prof^a Raffaella Borasi, que, na época, havia defendido tese e escrito muitos textos sobre análise de erros. A leitura desses trabalhos, seguida de buscas de outros textos sobre erros, especialmente estrangeiros, me fez direcionar a dissertação para este tema. Investiguei os erros cometidos por alunos de Licenciatura em Matemática ao realizarem demonstrações em Geometria. Como era um tema novo aqui no Brasil, após a defesa da dissertação eu resolvi continuar a trabalhar com erros. Passei a lecionar Cálculo Diferencial e Integral e desenvolvi pesquisas sobre os erros cometidos pelos alunos nos conteúdos de Cálculo, porque, como em qualquer curso universitário em que essa disciplina é lecionada, a repetência e a desistência eram muito grandes e eu esperava detectar dificuldades que pudessem ser superadas ao conhecer os erros cometidos pelos estudantes. Assim, para conseguir fundamentação teórica, tanto para a dissertação quanto para as pesquisas seguintes, fui colecionando material sobre análise de erros, em congressos, em periódicos e, mais adiante, com a facilidade da Internet, fui cada vez mais localizando trabalhos que, mesmo sem usar o nome "análise de erros", eram exemplos de investigações sobre dificuldades e obstáculos relacionados à aprendizagem de Matemática. Assim, pela quantidade de informações que coletei e pelas pesquisas que comecei a apresentar em artigos, anais de eventos e livros, fui, de certa forma, divulgando a análise de erros entre alunos e colegas.

Dá Licença: *Como foi a sua experiência com as turmas de Cálculo? Você poderia dividir conosco suas impressões gerais ao longo desses anos de pesquisa?*

HC: Nestes 15 anos em que trabalhei com Cálculo Diferencial e Integral I, com alunos de vários cursos que têm a disciplina em sua grade curricular, tive experiências positivas e negativas. Em primeiro lugar, surpreendi-me com as dificuldades dos alunos, relacionadas em especial com a Matemática Básica, e, mais particularmente, com a do Ensino Fundamental. Nos primeiros anos, elaborei projetos de pesquisa e, em conjunto com colegas e com bolsistas de Iniciação Científica, analisamos o perfil dos alunos, seus estilos de aprendizagem, as soluções dadas a questões de provas. Depois, à medida que notamos essas dificuldades em conteúdos básicos, procuramos desenvolver atividades em laboratório de informática, usando o *software* Maple V. Em comparação com outras turmas de Cálculo de mesmo semestre, encontrava, às vezes, algumas diferenças nas notas dos meus alunos, um pouco mais altas que as de outros estudantes, ou então percebia uma diminuição da

evasão. Mas acredito que essas diferenças se deviam, principalmente, ao fato de que os alunos notavam o esforço que estava sendo feito, o interesse dos pesquisadores, a preparação de atividades, e então correspondiam de alguma forma, dedicando-se um pouco mais ao estudo.

Dá Licença: *E quanto aos erros cometidos por esses alunos de Cálculo, o que você poderia dizer?*

HC: Os erros cometidos pelos alunos, ao longo dos anos, se mantinham constantes, ou seja, as dificuldades eram quase sempre relacionadas à Álgebra, as propriedades das operações, simplificações de frações algébricas, produtos notáveis, esboço de gráficos de funções, entre outros. Ou seja, nunca me parecia que as maiores dificuldades estavam relacionadas a limites, derivadas, integrais. Os únicos problemas "problemáticos" eram, sempre, os de otimização. No entanto, também notei, nos últimos semestres em que lecionei Cálculo, alguns problemas novos, que não se esperaria que fossem apresentados por alunos que tinham concluído o Ensino Fundamental. Por exemplo, erros de cálculo em operações elementares. Sempre foi permitido aos alunos o uso de calculadoras, inclusive as científicas, mas ainda assim apareciam erros em contas de adição, multiplicação ou divisão, até mesmo com números inteiros. Não aprofundei esse problema, mas ele existe e mereceria uma discussão.

Dá Licença: *Mas você destaca pontos positivos na sua experiência com o ensino de Cálculo?*

HC: Como ponto positivo, cito a alegria de ver um aluno entender algum conceito, fazer observações pertinentes antes mesmo de resolver uma questão. E também a constatação do brilho nos olhos daqueles repetentes que descobriam que eram capazes de resolver algum exercício ou problema que lhes havia trazido dificuldades em outros semestres. Mas essa alegria acontece com todos os professores e em todas as disciplinas, não é característica do Cálculo nem do trabalho com erros, evidentemente!

Dá Licença: *Você gostaria de destacar algo importante que tenha ocorrido nas suas aulas de Cálculo?*

HC: Há um fato que eu lembro porque me fez notar dificuldades dos alunos que talvez não esperássemos nesse nível de ensino: em certa aula, logo no início da disciplina, estávamos trabalhando no laboratório de informática, revisando o assunto "gráficos de funções", e os alunos, a partir de gráficos gerados pelo Maple, deviam responder algumas questões. Uma delas solicitava as coordenadas dos pontos em que a curva corta os eixos coordenados. Um dos estudantes não conseguia "ver" os pontos e eu tive que fazê-lo percorrer a curva com o dedo, na tela do micro, até "cortar" cada eixo e daí conseguir responder. Ora, se um aluno de Cálculo I não sabe responder a uma questão supostamente simples, como podemos querer que consiga resolver problemas bem mais complicados, envolvendo gráficos? Esse foi um dos momentos em que notei o potencial da análise de erros, como auxiliar do professor no diagnóstico de uma turma. Não é apenas a produção escrita do aluno que pode proporcionar informações valiosas; muitas vezes a fala, os gestos (como esse de percorrer com o dedo um traçado) trazem elementos não esperados e que podem ser discutidos no momento em que surgem.

Dá Licença: *Sim, é verdade! Outro dia li um artigo interessantíssimo escrito por uma pesquisadora italiana, chamada Cristina Sabena, sobre o papel dos gestos durante o processo de construção do conceito de integral. Fico feliz*

quando percebo que estamos alcançando novas dimensões, mais humanas, no que tange às pesquisas sobre o Ensino e a Aprendizagem da Matemática.

HC: Exatamente! Estamos muito acostumados a usar somente a visão e a audição em nossas aulas, mas esquecemos do tato, que permite que o aluno manuseie um determinado material e tenha mais elementos para formar sua imagem conceitual. No caso do aluno que percorreu a tela do computador com o dedo, possivelmente essa experiência lhe auxiliou a "ver" um ponto em um sistema de eixos coordenados. Mas também gostaria de fazer uma observação sobre os gestos que usamos em aula: eles podem auxiliar, mas às vezes podem induzir o aluno ao erro. Exemplifico: ao falar em limite de uma função em um ponto e esboçar, por exemplo, o gráfico da função real dada por

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$$

fazemos um gesto de aproximar as duas mãos que "deslizam" sobre a reta $y = x + 3$, parando no "furo" representado pelo ponto $(2, 5)$ e dizemos que, em $x = 2$, existe limite da função e vale 5. Mas essa gestualização, às vezes repetida com outros exemplos do mesmo tipo, pode ser "generalizada" pelo aluno quando é pedido $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x - 2}$ e ele responde que o limite existe. E,

dependendo da "altura" até onde foi esboçado o gráfico, ele pode, mesmo, dizer que o valor do limite é aquele número que ele "vê" no eixo das ordenadas.

Dá Licença: *De fato, os gestos são reflexos naturais de nossas representações mentais, o resultado do alinhamento do corpo e da mente. Qual professor de Cálculo nunca aproximou seu dedo indicador de seu polegar, na hora de explicar o conceito de convergência ou de elaborar um discurso sobre o "infinitamente pequeno"? A definição clássica de limite, por quadros estáticos instituídos pelos épsilons e deltas, não é natural se considerarmos as representações mentais usuais que tal conceito evoca. Por isso, fico feliz por ver diversos cursos de Cálculo I desatrelando as práticas que envolvem o conceito de limite da manipulação simbólica proveniente do lidar com sua definição formal; é chegada a hora de nos convenceremos que a formalização é uma etapa posterior e não um ponto de partida. Parece-me que este é um aspecto fortíssimo das pesquisas que incluem a análise de erros: em muitos casos elas tornam óbvio ao leitor o fato de que muitos erros se dão pela desconexão entre a formalização e a representação mental.*

HC: Concordo com você! O caso dos conteúdos de Cálculo I é uma prova disso, pois os alunos chegam à Universidade, muitas vezes, sem as habilidades necessárias para construir representações mentais a partir de abstrações, como são as definições de limite e continuidade, quando apresentadas antes de exemplos, de uso de recursos didáticos, etc. As análises de erros cometidos por alunos, desde as séries iniciais até os primeiros semestres dos cursos superiores, divulgadas em congressos, periódicos e livros, no Brasil e no exterior, podem ser fontes de novos trabalhos, dirigidos à investigação sobre as metodologias mais adequadas para ensinar esses conteúdos mais problemáticos. Aliás, é isso que fazemos em nossas práticas de sala de aula, sempre procuramos entender as dificuldades, só que, talvez, precisemos focar mais nos casos específicos e não só nas dificuldades mais gerais. Explico melhor: ao invés de discutirmos as dificuldades em Cálculo (que sabemos que são muitas e que têm levado a reprovações e desistências),

por que não discutimos alguma dificuldade em particular, que seja comum a todos os níveis de ensino, como o erro clássico de considerar que $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$? Por que esse erro é resistente, aparece desde a primeira vez em que a radiação é ensinada? Há muitas hipóteses, há muitos autores que discutem sua origem com base em um ou outro teórico, mas o erro persiste. Se “pegarmos” o erro no momento em que está sendo cometido por um aluno e desafiarmos esse estudante, questionando-o, propondo alguma atividade, discutindo com ele (e com a turma), será que teremos mais elementos para entender sua origem? É uma sugestão que pode ser tentada. Afinal, a análise de erros tem, em sua própria concepção, a idéia de que podemos aprender com os nossos erros. Se não conseguirmos mais elementos para compreender a gênese desse tipo de erro, pelo menos teremos propiciado aos alunos o desenvolvimento de novas habilidades para refletir sobre suas próprias produções.

Dá Licença: *Estou certo de que nossos alunos e professores ficarão atentos a estas questões! Erro e revisão, erro e revisão... este é um ciclo fundamental da construção e do refinamento da Matemática!*

HC: De fato! Lakatos, por exemplo, já rejeitava a busca da certeza absoluta, pois, para ele, a Matemática é falível como qualquer outro conhecimento humano. Provar um teorema, por exemplo, é um processo contínuo, que inicia com uma conjectura e se apóia em provas provisórias, que são refutadas por contraexemplos. Assim, a conjectura inicial vai sendo refinada. Da mesma forma, o aluno, para construir seu conhecimento, passa por erros que são revisados, por ele, por seus companheiros mais capazes ou pelo professor. E é assim que seu conhecimento é refinado.

Dá Licença: *Helena, foi um prazer absoluto recebê-la e conversar contigo. Estou certo de que nossos leitores apreciarão muitíssimo nossa conversa! Seja sempre muito bem vinda ao Jornal Dá Licença!*

HC: Eu é que agradeço a oportunidade de conversar com você e com os leitores de uma forma tão agradável, em que as idéias foram se encadeando e evidenciando que, em Educação Matemática, não há tema isolado, todos se relacionam e todos se voltam, no fim das contas, para a o aluno e para sua aprendizagem.

executarmos as ações previstas em nosso projeto. E vocês, caros alunos, são o norte de nossas ações. Contamos com o apoio de vocês! O ano de 2011 realmente promete para o Dá Licença!”

Outra boa notícia é que temos novos bolsistas de extensão que estarão trabalhando conosco aqui no Dá Licença: Mariana Peres, Bruna Raeder e Juliana Duarte.

EQUIPE DO JORNAL DÁ LICENÇA

jornal.dalicensiatura@gmail.com

Coordenadora: Prof^ª Márcia Martins (GAN)

Vice-coordenadora: Prof^ª Valéria Zuma Medeiros (GMA)

Docentes Participantes: Prof^ª Anna Beatriz A. Santos (GAN) +

Prof José Roosevelt Dias (GGM) + Prof Paulo Trales (GAN) +

Prof Carlos Mathias (GMA) + Prof Wanderley M. Rezende (GMA)

Bolsistas: Mariana Peres + Bruna Raeder



O Programa Dá Licença, cujo coordenador é o Prof Wanderley Moura Rezende (GMA), começou com todo o gás o ano de 2011!

Vejam a mensagem que ele nos mandou:

“Ganhamos! O Dá Licença agora é FAPERJ! Isso mesmo. Das 235 propostas selecionadas pelo programa de Auxílio à Pesquisa (APQ 1) da FAPERJ, 44 projetos são da Universidade Federal Fluminense (UFF), sendo o Programa Dá Licença um deles (confira no link http://www.faperj.br/boletim_interna.phtml?obj_id=7144). Isso é motivo de muito orgulho para a nossa equipe. Agora é só trabalhar para