Uma introdução ao estudo dos números transfinitos

Anna Beatriz Amaral Santos - UFF
abas@pontocom.com.br
Carla do Nascimento Lopes - UFF
Marisa Ortegoza da Cunha - UFF
ganmoc@.vm.uffcom.br

Uma introdução ao estudo dos números transfinitos

Ao tentar transferir para conjuntos infinitos propriedades válidas em conjuntos finitos, nossa intuição pode falhar surpreendentemente. Nem mesmo o Axioma Euclidiano, que afirma que o *todo é maior do que a parte*, tão óbvio quando se trata de quantidades finitas, continua válido se, por exemplo, tomarmos o conjunto IN dos número naturais. Aceitando o fato de que uma bijeção entre conjuntos estabelece que ambos têm a mesma quantidade de elementos, é fácil ver que a função f: IN $\longrightarrow$ 2IN, definida por f(n) = 2n, entre os naturais e os naturais pares, é uma bijeção. Logo, IN e um seu subconjunto próprio possuem a mesma quantidade de elementos.

Há que se ter muito cuidado, portanto, ao lidar com grandezas infinitas!

Além disso, podemos nos perguntar se há “mais de um infinito” e, em caso afirmativo, se “é possível compará-los”. Questões como estas foram corajosamente abordadas por Cantor e a notação adotada neste texto segue aquela introduzida por esse matemático, em seus trabalhos de 1895 e 1897 [Cantor, 1955]. O objetivo deste texto é apresentar os conceitos básicos que conduzem a algumas respostas.

Desde os primeiros contatos com a matemática, lidamos com conjuntos e aprendemos que dois conjuntos são iguais quando possuem exatamente os mesmos elementos. Neste contexto, porém, não somente nos preocuparemos com <u>quais</u> são os elementos de um dado conjunto, mas, principalmente, com a forma como estão dispostos, ou seja, <u>a ordem</u> em que são listados. Para isso, precisamos da seguinte definição:

Uma relação R num conjunto A é uma **relação de ordem estrita** (ou simplesmente uma **relação de ordem**) quando:

(i) $\forall$ x $\in$ A, ~(xRx) (irreflexividade)

(ii) $\forall$ x, y $\in$ A, se xRy então ~(yRx) (assimetria)

(iii) $\forall$ x, y, z $\in$ A, se xRy e yRz então xRz (transitividade)

Se xRy dizemos que **x precede y** ou que **y segue x** (ou ainda que **y é sucessor de x**) e escrevemos x $\prec$ y.

Exemplo 1. Consideremos a relação < definida no conjunto IN dos números naturais. Temos então que 3 precede 5, que 10 segue 7 e que 0 não é sucessor de nenhum número natural.

Um **conjunto ordenado** é um conjunto no qual foi definida uma relação de ordem e é representado pelo par (conjunto, relação). Por exemplo, se A é um conjunto no qual está definida a relação de ordem R tal que $\forall$ x, y $\in$ A, x R y $\Leftrightarrow$ x $\prec$ y, podemos escrever (A, R) ou (A, $\prec$).

Exemplo 2.

a) Indicando por R_1 a ordem natural dos números naturais, temos que (IN, R_1) é um conjunto ordenado, isto é, (IN, R_1) = {1, 2, 3, ...}.

b) Indicando por R_2 a ordem inversa de R_1, ou seja, escrevendo os números naturais na ordem decrescente, temos que (IN, R_2) é um conjunto ordenado, onde (IN, R_2) = {..., 3,2,1}.

Exemplo 3. A partir de um conjunto com 3 elementos podemos obter 6 conjuntos ordenados distintos: {a,b,c}, {a,c,b}, {b,a,c}, {b,c,a}, {c,a,b} e {c,b,a}. De modo geral, um conjunto de *n* elementos pode ser ordenado de *n*! maneiras distintas.

Um **subconjunto de um conjunto ordenado** (A, R) é um conjunto ordenado (B, R), onde B $\subset$ A. Em outras palavras, a relação entre dois elementos de B é a mesma existente quando considerados como elementos de A.

Exemplo 4. Considerando o conjunto ordenado (A, R) = {a,b,c,d}, então B = {a,c,d} e C = {b,c} são subconjuntos de (A, R) e D = {b,a} não o é.

Dado um conjunto ordenado (A, $\prec$) um elemento $a \in$ A é chamado o **primeiro elemento** de A quando *a* não é sucessor de nenhum outro elemento de A, ou seja, quando $a \prec b$, para todo *b* em A, $b \neq a$. Analogamente, temos o conceito de **último elemento**. Se *a*, *b* e *c* estão em A, $a \prec b$ e $b \prec c$, dizemos que *b* está entre *a* e *c*.

Um conjunto ordenado (A, R) é um conjunto **bem-ordenado** quando todo subconjunto não vazio de A possui um primeiro elemento. O conjunto vazio é, por definição, bem-ordenado.

Observações.

1) Todo subconjunto de um conjunto bem-ordenado é bem-ordenado.

2) Todo conjunto ordenado finito é bem-ordenado, possuindo primeiro e último elementos.

Exemplo 5.

a) O conjunto ordenado (IN, R_1) do exemplo 2 tem primeiro elemento 1 e não tem último elemento. Além disso, todo subconjunto não-vazio de (IN, R_1) também possui primeiro elemento; logo, (IN, R_1) é um conjunto bem-ordenado.

b) Claramente, o conjunto ordenado (IN, R_2) do exemplo 2 não é bem-ordenado, uma vez que não tem primeiro elemento. Ele tem 1 como último elemento.

Vamos, agora, definir uma relação entre conjuntos ordenados que nos possibilitará compará-los:

Dizemos que dois conjuntos ordenados (A, R_1) e (B, R_2) são **similares**, e representamos por (A, R_1) ~ (B, R_2), quando existe uma função bijetiva f: A $\longrightarrow$ B tal que

$$\forall\ a_1, a_2 \in A, \text{ se } a_1 R_1 a_2 \text{ então } f(a_1) R_2 f(a_2).$$

Nesse caso f é chamada uma **função de similaridade** de A em B. Em outras palavras, uma função de similaridade de um conjunto ordenado em outro é uma correspondência 1-1 que deixa invariante a ordem de sucessão dos elementos. Se existe uma função de similaridade de um conjunto ordenado A em um conjunto ordenado B então dizemos que A e B são **similares**.

Se os conjuntos A e B são similares, então, ou ambos possuem um primeiro elemento ou nenhum possui. No caso afirmativo, obrigatoriamente, o primeiro elemento de A corresponde, sob a função de similaridade, ao primeiro elemento de B.

Observações.

1) Quaisquer dois conjuntos ordenados finitos de mesma cardinalidade são similares.

2) Se um conjunto é similar a um outro, bem-ordenado, ele também é bem-ordenado.

Exemplo 6. Os conjuntos ordenados (IN, R_1) = {1, 2, 3, ...} e (IN, R_2) = {..., 3, 2, 1} não são similares, visto que o primeiro possui primeiro elemento e o segundo, não.

No exemplo 1 introduzimos a ordem inversa para o caso particular da ordem natural definida em IN. Podemos estender essa definição a todo conjunto ordenado:

Dado o conjunto ordenado (A, R), podemos obter um outro conjunto ordenado (A, R*), onde R* é a ordem inversa de R. Para simplificar a notação, quando tratarmos de subconjuntos de IR com a ordem natural dos reais, omitiremos o símbolo da ordem. Analogamente, quando a ordem for a inversa da natural, indicaremos apenas o conjunto assinalado com *. Assim, podemos escrever

(IN, R_1) = IN

(IN, R_2) = (IN, R_1*) = IN*

Podemos verificar que a relação de similaridade definida entre conjuntos ordenados é uma relação de equivalência. Em outras palavras, a coleção de todos os conjuntos ordenados se decompõe em **classes de equivalência,** de forma que dois conjuntos ordenados pertencem à mesma classe se, e somente se, são similares. A cada uma dessas classes de equivalência é associado um símbolo, chamado **tipo de ordem**. O tipo de ordem de uma classe é o mesmo de qualquer um de seus representantes e indicamos o tipo de ordem de um conjunto A por $\overline{A}$. Se A e B pertencem à mesma classe de equivalência, então eles têm o mesmo tipo de ordem e escrevemos $\overline{A} = \overline{B}$.

No quadro abaixo mostramos algumas representações de tipos de ordem de uso já consagrado.

conjunto ordenado	**tipo de ordem**
{1, 2, 3, ..., n}	n
$\varnothing$	0
{a}	1
IN = {1, 2, 3, ...}	ω
IN* = {..., 3, 2, 1}	ω*
Z = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}	π
Q	η
IR	λ

Veremos agora como é possível ordenar o conjunto U obtido ao se unir uma família ordenada de conjuntos A_i, ordenados e dois a dois disjuntos. A partir daí poderemos definir o tipo de ordem de U. Para não sobrecarregar a notação, indicaremos cada conjunto ordenado apenas pelo conjunto em questão.

Sejam *n* conjuntos ordenados, dois a dois disjuntos, ordenados na forma $A_1, ..., A_n$.

Seja $U = A_1 \cup ... \cup A_n$.

Se $x, y \in U$ então existem i, j no conjunto {1, ..., n} tais que $x \in A_i$ e $y \in A_j$.

Definimos em U a seguinte relação de ordem $\prec$

se $i < j$ então $x \prec y$

se $i = j$ então $x \prec y \Leftrightarrow xR_iy$, onde R_i é a relação de ordem definida em A_i

Notemos que, ao ordenar os conjuntos a serem reunidos, determinamos a ordem de U; assim, ao unir uma coleção de conjuntos ordenados e dois a dois disjuntos, podemos obter diferentes conjuntos ordenados, como ilustra o exemplo 7.

Exemplo 7. Sejam A = {a, b} e B = {c, d, e, f}.

Chamando $A = A_1$ e $B = A_2$, temos: $A_1 \cup A_2 = A \cup B$ = {a, b, c, d, e, f}.

Chamando $B = A_1$ e $A = A_2$, temos: $A_1 \cup A_2 = B \cup A$ = {c, d, e, f, a, b}.

Podemos concluir, portanto, que a união ordenada de conjuntos ordenados depende da ordem na qual consideramos os conjuntos.

O **tipo de ordem do conjunto ordenado** U é, por definição, a soma (ordenada) dos tipos de ordem dos conjuntos ordenados considerados. A condição de que a soma dos tipos de ordem seja ordenada deriva da não comutatividade da soma de tipos de ordem, como ilustra o exemplo 8-b.

Exemplo 8.

a) Se $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A_2 = \{50, 51, ...\}$, $A_3 = \{15\}$ e $U = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, então $\overline{U} = 10 + \omega + 1$.

b) Sejam A = {a} e $B = \{b_1, b_2, b_3, ...\}$.

Se $U_1 = A \cup B$ então $\overline{U_1} = 1 + \omega = \omega$.

Se $U_2 = B \cup A$ então $\overline{U_2} = \omega + 1 \neq \omega$, uma vez que $\omega + 1$ é o tipo de ordem do conjunto $\{b_1, b_2, b_3, ..., a\}$, no qual há um último elemento.

c) Sejam $A = \{b_1, b_2, b_3, ...\}$ e $B = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$. Então $\overline{A} = \omega$ e $\overline{B} = \omega$ e temos:

Se $U_1 = A^* \cup B = \{..., b_3, b_2, b_1, a_1, a_2, a_3, ...\}$ então $\overline{U_1} = \omega^* + \omega = \pi$.

Se $U_2 = B \cup A^* = \{a_1, a_2, a_3, ..., b_3, b_2, b_1\}$ então $\overline{U_2} = \omega + \omega^* \neq \pi$.

d) Se $A_1 = \{a\}$, $A_2 =]a, b[$, $A_3 = \{b\}$ e $U = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = [a, b]$, então $\overline{U} = 1 + \lambda + 1$.

e) Se $A_1 = \{1, 3, 5, 7, ...\}$, $A_2 = \{2, 4, 6, 8, ...\}$ e $U = A_1 \cup A_2 = \{1, 3, 5, 7, ..., 2, 4, 6, 8, ...\}$ então $\overline{U} = w + w$.

Podemos agora apresentar o conceito chave deste texto: os números transfinitos.

O tipo de ordem de um conjunto bem-ordenado finito é chamado **número ordinal finito**. O tipo de ordem de um conjunto bem-ordenado infinito é chamado **número ordinal transfinito** (ou simplesmente **número transfinito**). Em outras palavras, *números transfinitos são os tipos de ordem de conjuntos infinitos e bem-ordenados*.

Exemplo 9.

a) Números ordinais finitos: 0 (zero) e todos os naturais.

b) Números transfinitos: ω, $\omega + 1$, $\omega + 2$, entre outros.

Note que os tipos de ordem ω^*, π, η e λ não são números ordinais porque são tipos de ordem de conjuntos ordenados, mas não bem-ordenados (IN*, Z, Q e IR, respectivamente).

Uma vez definidos os números ordinais, o próximo passo é estabelecer um critério para compará-los. Para isso, vamos precisar comparar os conjuntos bem-ordenados dos quais esses números ordinais são tipos de ordem:

Sejam $(A, \prec)$ um conjunto ordenado e *a* em A. O conjunto de todos os elementos de A que precedem *a* é chamado **segmento do conjunto A determinado pelo elemento *a*** e representado por A_a. Em símbolos: $A_a = \{x \in A \mid x \prec a\}$. Sejam A e B conjuntos bem-ordenados. Dizemos que **B é menor do que A** quando B é similar a um segmento de A e escrevemos B < A. Sejam, agora, a e b números ordinais e A e B conjuntos bem-ordenados de tipos a e b, respectivamente. Dizemos que b < a (ou que a > b) quando B é menor do que A.

Observações.

1. Em se tratando dos números ordinais finitos, a definição equivale a afirmar que $0 < 1 < 2 < 3 < ...$

2. Os números transfinitos são maiores do que quaisquer números ordinais finitos.

3. Para os números ordinais vale a propriedade da tricotomia, isto é, dados a e b números ordinais, vale uma e apenas uma das afirmações seguintes: $a < b$, $a = b$ ou $a > b$.

4. Se A é um conjunto bem-ordenado então A não é similar a qualquer de seus segmentos.

A partir dessas propriedades, mostraremos que um conjunto formado por números ordinais é um conjunto bem-ordenado. A prova disso usa o Lema abaixo:

Lema.

Seja S uma coleção de conjuntos bem-ordenados não similares dois a dois. Então existe em S um conjunto que é menor do que todos os demais.

Prova.

Seja $A \in S$. Se A é o menor dos conjuntos em S o teorema está provado. Se não, S contém conjuntos menores que A e eles são similares a segmentos de A. Seja B o conjunto dos elementos *a* do conjunto A tais que os segmentos A_a determinados por eles são similares a conjuntos em S. Se a* é o primeiro elemento em B e $A^* \in S$ é um conjunto similar ao segmento A_{a^*} então A* será o menor conjunto em S. De fato, dado $C \in S$, temos que A* é menor do que C se A é menor do que C. Por outro lado, se C é menor do que A então $C \sim A_a$, para *a* em B. Mas a* é o primeiro elemento em B; logo, $a^* \prec a$ e então A* é menor do que A pois A_{a^*} é um segmento de A_a. Logo, A* é menor do que C. ◆

Teorema 1.

Seja M um conjunto de números ordinais distintos. Então existe em M um elemento que é menor do que todos os demais.

Prova.

Para cada $\alpha \in M$ existe um conjunto bem-ordenado A cujo tipo de ordem é α. Pelo lema, entre esses conjuntos existe um, digamos, A_0, que é menor do que todos os demais. Seja $\alpha_0 = \overline{A}_0$. Então α_0 é o menor dos elementos no conjunto M. ◆

Segue desse teorema o seguinte resultado:

Corolário.

Todo conjunto de números ordinais, ordenado pela magnitude de seus elementos, é bem-ordenado.

O Teorema 1 e seu Corolário nos permitem concluir que não faz sentido considerar o conjunto de *todos* os números ordinais. De fato, sendo α um número ordinal e representando por W_α o conjunto dos números ordinais menores que α, segue do Teorema 1 que W_α é bem-ordenado, e pode-se provar que o tipo de ordem de W_α é α. Assim, caso considerássemos a existência do conjunto de todos os números ordinais, digamos, W, pelo Corolário, W seria bem-ordenado, com tipo de ordem γ. Então $\gamma \in W$ e o segmento W_λ teria o mesmo tipo de ordem de W, o que implicaria W e W_λ similares, o que não pode ocorrer. Esse resultado é conhecido como **Antinomia de Burali-Forti**.

Se α é um número ordinal então $\alpha + 1$ também o é e, além disso, é o primeiro número ordinal que sucede α. O interessante é que, enquanto todo número ordinal possui um primeiro sucessor, existem números ordinais que não possuem um último predecessor. É o caso, por exemplo, de ω. Dependendo de ter ou não um número imediatamente anterior, um número ordinal se classifica em **número ordinal de primeiro** ou **segundo tipo**, respectivamente.

Como conseqüência da existência de números ordinais de segundo tipo, quando estendemos a indução finita para a transfinita, não mais contamos com as duas possibilidades de hipótese de indução, a saber, de a propriedade a ser provada ser válida para o antecessor imediato de um certo k **ou** ser válida para todos os números menores que k. Na indução transfinita, somente o segundo enunciado pode ser considerado.

Exemplo 10. Todos os números ordinais finitos, exceto o zero, e todos os números ordinais da forma $\alpha + 1$ (como $\omega + 1$) são números ordinais de primeiro tipo. Como vimos anteriormente, ω é número ordinal de segundo tipo.

Dentre os números ordinais transfinitos, aqueles que são tipos de ordem de conjuntos enumeráveis constituem a chamada **segunda classe de números**, representada por K_0. A primeira classe é constituída pelos números ordinais finitos. Importante notar que há números ordinais que não pertencem a nenhuma dessas classes, por serem tipos de ordem de conjuntos bem-ordenados não enumeráveis. Veremos, no corolário do Teorema 4, que o próprio conjunto K_0 possui essa característica. Inicialmente, vamos mostrar que ω é o menor elemento de K_0.

Teorema 2.

O número ordinal ω é o menor número ordinal de segunda classe. Além disso, é o menor número transfinito.

Prova.

Por definição, ω é o tipo de ordem do conjunto IN = {1, 2, 3, ...}. Todo segmento N_n desse conjunto é um conjunto finito. Em conseqüência, um número ordinal menor do que ω é um número ordinal finito. Logo, ω é o menor número transfinito. Visto que $\omega \in K_0$, o teorema está provado. ♦

Teorema 3.

Se $\alpha \in K_0$ então $\alpha + 1 \in K_0$.

Prova.

Vimos que α é o tipo de ordem de W_α. Logo, $\alpha + 1$ é o tipo de ordem do conjunto $W_\alpha \cup \{\alpha\}$, que é também bem-ordenado. Se $\alpha \in K_0$, isto é, se W_α for enumerável então $W_\alpha \cup \{\alpha\}$ também o será; logo, $\alpha + 1 \in K_0$.

Teorema 4.

Se S é um subconjunto enumerável de K_0 e λ é o menor número ordinal maior do que todos os números ordinais de S, então $\lambda \in K_0$.

Prova.

Se S contém um maior elemento, α, então $\alpha \in K_0$ e, pelo Teorema 3, $\alpha + 1 \in K_0$ e $\alpha + 1$ é o menor número maior do que todos os elementos de S. Se S não contém um maior elemento, então seja λ o menor número ordinal maior do que todos os elementos de S. Claramente, temos $W_\lambda = \cup_{\alpha \in S} W_\alpha$. Como $S \subset K_0$ e S é enumerável, cada W_α é um conjunto bem-ordenado enumerável. Logo, W_λ é também um conjunto bem-ordenado enumerável, o que implica $\lambda \in K_0$.

Corolário.

A classe K_o é não enumerável.

Prova.

Supondo K_0 enumerável, seja λ um número ordinal maior do que todos os números em K_0. Claramente, $\lambda \notin K_0$, mas, pelo Teorema 4, $\lambda \in K_0$, o que leva a uma contradição. Logo, K_0 é não enumerável.

Consideremos agora os conjuntos divididos em famílias tais que dois conjuntos estão na mesma família quando existe uma bijeção entre eles. Associamos a cada uma dessas famílias um símbolo e chamamos esse símbolo de **potência** de todo conjunto dessa dada família.

Exemplo 11. Os conjuntos IN = {1, 2, 3, ..} e 2IN = {2, 4, 6, ...} têm a mesma potência, pois, como vimos no início do texto, a função f: IN $\longrightarrow$ 2IN tal que f(n) = 2n é, claramente, uma bijeção.

Como uma função de similaridade é uma bijeção, se dois conjuntos ordenados são similares então possuem a mesma potência. Representando a potência de um conjunto A por $\overline{\overline{A}}$ [1], temos que se $\overline{A} = \overline{B}$ então $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$. A recíproca, entretanto, não é verdadeira. De fato, como vimos no exemplo 6, (IN, R_1) e (IN, R_2) não são similares, embora possuam a mesma potência.

A potência de um conjunto bem-ordenado é chamada **aleph** (aleph é a primeira letra do alfabeto hebreu e é representada pelo símbolo $\aleph$). Os alephs de conjuntos infinitos são chamados **alephs infinitos**. O símbolo $\aleph_0$ (aleph zero) representa a potência de um conjunto enumerável. Podemos dizer, então, que a potência de IN é $\aleph_0$.

[1] Cantor tentou definir potência com o auxílio da seguinte expressão: “A potência de um dado conjunto A é o que permanece ao abstrairmos todas as propriedades de seus elementos e também a sua ordem.” A barra dupla sobre a letra indicativa do conjunto corresponde, no entender de Cantor, a essa dupla abstração.

Teorema 5.

Não existem potências intermediárias entre $\aleph_0$ *e a potência do conjunto* K_0.

Prova.

Seja Ω o primeiro número ordinal seguindo K_0. Seja W_Ω a união do conjunto enumerável IN = {1, 2, 3, ...} e K_0. Então a potência de W_Ω é igual à de K_0. Suponhamos que exista uma potência m tal que $\aleph_0$ < m < potência de K_0. Então podemos extrair um subconjunto M, de potência m, de W_Ω. Como todo segmento de W_Ω é determinado por um número de IN ou de K_0, isto é, é um conjunto finito ou enumerável, temos que M é também finito ou enumerável, mas isso contradiz a hipótese m = $\overline{\overline{M}} > \aleph_0$. ◆

Diante desse resultado, nada mais natural do que atribuir à potência de K_0 o símbolo $\aleph_1$ (aleph 1). Podemos, então, reescrever o Teorema 5: *não existem potências intermediárias entre* $\aleph_0$ *e* $\aleph_1$.

Como $\aleph_0 < \aleph_1$, intuitivamente, temos que a "quantidade" de elementos em K_0 é "maior" do que a "quantidade" de elementos em IN. Por ser um conjunto não enumerável, seria impossível adotar uma notação para todos os elementos de K_0. Podemos, no entanto, vislumbrar seqüências crescentes desses números:

$\omega < \omega + 1 < ... < \omega + n < ... < \omega + \omega = \omega.2$

$< \omega.2 + 1 < ... < \omega.2 + n < ... < \omega.2 + \omega = \omega.3 <$

$< ... < \omega.\omega = \omega^2 < ... < \omega^n < ... < \omega^\alpha < \omega^\alpha + 1 < ...$

O primeiro número seguindo os números da forma $\omega^{\omega^{\omega}}$ é denotado por ε. Os números seguindo ε são $\varepsilon + 1$, $\varepsilon + 2$, e assim por diante.

Assim como a comparação de números ordinais se baseou na comparação entre os conjuntos dos quais esses números eram tipos de ordem, podemos também comparar dois alephs a partir da comparação dos conjuntos dos quais são potências. Decorre daí que, qualquer conjunto de alephs, ordenado segundo suas magnitudes, é bem-ordenado. A propriedade da tricotomia, válida para os números ordinais, também vale para os alephs. Como vimos anteriormente, não é possível considerar o conjunto de <u>todos</u> os números ordinais. Da mesma forma, não podemos considerar o conjunto de todos os alephs, como fica claro a partir do Teorema 6. Antes, porém, uma notação:

Dado um conjunto ordenado A, de tipo de ordem α, isto é, $\overline{A} = \alpha$, podemos escrever $\overline{\overline{A}} = \overline{\alpha}$ para representar a potência de A, ou seja, se α é um número ordinal, $\overline{\alpha}$ é um aleph.

Teorema 6.

1. Não existe um aleph maior que todos.

2. Para cada conjunto M de alephs, existem alephs maiores que todos os alephs em M.

Prova.

1. Seja *a* um aleph. Então existe um conjunto bem-ordenado A cuja potência é *a*. Consideremos, juntamente com A, todos os conjuntos bem-ordenados consistindo dos mesmos elementos mas correspondendo a outros métodos de ordenação. Os tipos de ordem desses conjuntos formam um conjunto T de números ordinais. Seja β um número ordinal maior do

que todos os elementos de T e seja b = $\overline{\beta}$. Então b é um aleph e b > a. De fato, se $\alpha = \overline{A}$, então $\alpha \in$ T e $\alpha < \beta$. Mas então a $\leq$ b. Suponhamos a = b. Nesse caso é possível estabelecer uma correspondência φ, 1-1, entre A e W_β (conjunto dos números ordinais menores do que β). Seja A_0 o conjunto consistindo dos mesmos elementos de A mas ordenados de tal modo que a ordem de precedência entre dois elementos quaisquer de A corresponda àquela existente entre os elementos a eles relacionados por j. Então o conjunto A_0 é similar a W_β, o que significa que seu tipo de ordem é β e, então, $\beta \in$ T, o que contradiz a definição de β. Logo, a única alternativa possível é b > a.

2. Podemos supor que não há um aleph maior em M e que os alephs em M são distintos. Associamos a cada aleph em M um conjunto bem-ordenado, tendo aquele aleph como potência, e formamos a união U desses conjuntos, seguindo a ordem dos elementos de M. Como M é bem-ordenado, o conjunto U, sendo a união de um conjunto bem-ordenado de conjuntos bem-ordenados é, ele próprio, bem-ordenado e sua potência é um aleph. É claro que esse aleph é maior do que todos os alephs em M, pois todo aleph em M é potência de um subconjunto de U e, assim, não é maior do que a potência de U. ◆

Corolário.

Todo aleph possui um aleph imediatamente sucessor.

Prova.

De fato, como qualquer conjunto de alephs é bem-ordenado, se M é um conjunto de alephs e a $\in$ M, então, pelo Teorema 6, existe um aleph b, em M, maior do que todos os demais em M. Se b segue imediatamente a, a afirmativa está provada. Se não, considerando o conjunto dos alephs m tais que a < m < b, existe um menor elemento entre eles que é o aleph procurado.

O conjunto IR, dos números reais, munido da ordem natural, não é um conjunto bem-ordenado. Entretanto, existe um teorema, enunciado a seguir, e cuja demonstração pode ser encontrada em [Natanson, 1960], que garante a possibilidade de se ordenar qualquer conjunto de forma a torná-lo bem-ordenado:

Teorema 7. (E. Zermelo)

Todo conjunto pode ser bem-ordenado.

Com esse surpreendente resultado, podemos interpretar toda potência como aleph. A partir daí podemos nos perguntar qual aleph seria a potência do conjunto dos números reais. Esse problema, conhecido como *problema do contínuo*, ainda está em aberto e há uma hipótese de que seja $\aleph_1$.

Finalizando, há um método, conhecido como *método da diagonal*, devido a Cantor, de constatarmos a existência de uma quantidade infinita de "infinitos": dado um conjunto qualquer, X, infinito, exibiremos um segundo conjunto, de potência maior do que a de X. Para isso, demonstramos o seguinte

Teorema 8.

Sejam X e Y conjuntos arbitrários, onde Y contém, pelos menos, dois elementos.

Não existe uma função sobrejetiva de X em F(X, Y), onde F(X, Y) denota o conjunto das funções definidas de X em Y.

Prova.

Seja $\varphi : X \longrightarrow F(X, Y)$, arbitrária. A partir de φ definimos a função constante $\varphi_x : X \longrightarrow Y$ que associa cada elemento de X ao valor φ(x). Definimos, agora, uma função $f: X \longrightarrow Y$ tal que, para cada x em X, $f(x) \neq \varphi_x(x)$. Isso é possível porque Y possui, pelo menos, dois elementos. Dessa forma, a função f é diferente da função φ_x, para todo x em X. Logo, $f \notin \varphi(X)$ e, portanto, φ não é sobrejetiva.

Há toda uma álgebra definida para os números transfinitos, que pode ser encontrada, por exemplo, em [Cantor, 1955], mas que foge ao caráter introdutório deste texto.

Bibliografia

Cantor, G. *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*.NY: Dover Publications, Inc., 1955.

Halmos, P.R. *Naive Set Theory*. NY: Springer-Verlag, 1987.

Natanson, I.P. *Theory of Functions of a Real Variable*. NY: Frederick Ungar Publishing Co., 1960.

Wilder, R. *Introduction to the Foundations of Mathematics*. 2nd. Ed. NY: John Wiley & Sons, Inc., 1965.