“ RESGATANDO MÉTODOS PARA O CÁLCULO DE RAÍZES QUADRADAS E RAÍZES CÚBICAS.”

Daniela dos Santos Rocha
Bolsista do PADCT - UFF / 1997
Lisete Godinho Lustosa *(Prof. orientador)*
Mestre em Matemática - UFF
Professora Adjunta - GAN / UFF

"RESGATANDO MÉTODOS PARA O CÁLCULO DE RAÍZES QUADRADAS E RAÍZES CÚBICAS."

"Tudo vale a pena se a alma não é pequena."

Fernando Pessoa

I – INTRODUÇÃO

O cálculo de raízes, sejam elas quadradas, cúbicas ou de qualquer índice, revela-se um grande problema não só para alunos que estão aprendendo, mas também para grande parte dos professores, que, ao ensinarem o cálculo de raízes, contam com um método não muito eficiente, tanto para raízes não exatas, quanto para aquelas onde o radicando é um número grande.

Buscamos com este trabalho resgatar métodos baseados em aproximações para o cálculo de raízes quadradas e cúbicas que, embora sejam muito antigos, podem ser desconhecidos para uma parte dos professores de Matemática. São métodos que, se chegassem às nossas salas de aula, permitiriam ao aluno encontrar raízes exatas ou não, de modo claro e prático, utilizando conceitos já conhecidos, e podendo melhorar sempre o resultado final com novas aproximações.

II - O MÉTODO BABILÔNIO PARA O CÁLCULO DE RAÍZES QUADRADAS

A matemática criada na Babilônia era de longe mais adiantada do que as das outras sociedades orientais. Um fator determinante para esse desenvolvimento é a grande habilidade para calcular, cultivada pelos babilônios. Um exemplo do nível alcançado da matemática dos babilônios é o processo para o cálculo de raízes quadradas exatas e não exatas, desenvolvido por este povo há 4000 anos. Esse processo, baseado em aproximações, permitiu aos matemáticos da época o cálculo de raízes com uma grande precisão. Os babilônios encontraram para $\sqrt{2}$ o valor aproximado 1,414222, que difere apenas 0,000008 do valor aproximado que hoje conhecemos para $\sqrt{2}$. O segredo da precisão nas aproximações dos babilônios estava na notação para frações desenvolvida por esse povo, que é considerada a melhor notação que qualquer civilização conseguiu até o Renascimento.

Vamos à descrição do método:

- Chamemos de a o número natural do qual queremos a raiz quadrada.
- Como primeira aproximação, vamos considerar o número natural cujo quadrado mais se aproxima por falta de a e chamá-lo de a_1.
- A partir de a e a_1 vamos calcular um novo número chamado b_1, onde $b_1 = a/a_1$. O número b_1 nos auxiliará na segunda aproximação.
- A segunda aproximação, que chamaremos de a_2, será a média aritmética $(a_1 + b_1)/2$.
- A partir de a e a_2, vamos calcular b_2, onde $b_2 = a/a_2$ e nos auxiliará na terceira aproximação.
- A terceira aproximação, que chamaremos de a_3, será a média aritmética $(a_2 + b_2)/2$.

Verifiquemos através do cálculo aproximado de $\sqrt{75}$, a precisão desse método para oito "casas decimais":

seja a = 75.

$a_1 = 8$

$b_1 = a/a_1 = 9{,}375$

$a_2 = (a_1 + b_1)/2 = 8{,}675$

$b_2 = a/a_2 = 8{,}63309352$

$a_3 = (a_2 + b_2)/2 = 8{,}66029676$

$b_3 = a/a_3 \cong 8{,}66021131$

$a_4 = (a_3 + b_3)/2 \cong 8{,}66025403$

$b_4 = a/a_4 \cong 8{,}66025404$

$a_5 = (a_4 + b_4)/2 \cong 8{,}66025403$.

Assim, obtemos $\sqrt{75} \cong 8{,}66025403$ pelo método babilônio. Por outro lado, utilizando uma máquina de calcular, encontramos para $\sqrt{75}$, com aproximação de doze "casas decimais", o valor de 8,660254037844, onde o último numeral 4 é o algarismo duvidoso. Portanto, após a realização de cinco etapas, os oito algarismos iniciais das "casas decimais" de ambos os números são coincidentes, isto é, o método babilônio nos fornece um valor aproximado para $\sqrt{75}$ com margem de erro inferior a 0,00000001.

Vamos a seguir justificar o método babilônio:

Seja $a \in$ R tal que $a > 0$.

Vamos supor um valor inicial a_1 e definir

$$a_{n+1} = [a_n + a/a_n]/2.$$

Para concluirmos que a seqüência (a_n) assim obtida converge para $\sqrt{a}$, começamos observando que, para todo real não nulo x, $[x - a/x]^2 \geq 0$ donde $[x + a/x]^2 \geq 4a$.

Então, $(a_{n+1})^2 = [a_n + a/a_n]^2/\,4 \geq a$, para todo $n \in$ N.

Além disso, para todo real não nulo x, se $a \leq x^2$ então $[x + a/x]^2/\,4 \leq [x + x]^2/4 = x^2$. Como $a \leq (a_{n+1})^2$, para todo $n \in$ N, segue-se que $(a_{n+2})^2 \leq (a_{n+1})^2$. Logo $a_{n+2} \leq a_{n+1}$ pois esses números são maiores ou iguais a zero. Portanto, mesmo que tivéssemos escolhido $a_1 < \sqrt{a}$, vale sempre $a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \ldots$, com $(a_{n+1})^2 \geq a$, para todo $n \in$ N. Portanto, existe $c = \lim_{n \to \infty} a_n$. Fazendo $n \to \infty$ na igualdade $a_{n+1} = [a_n + a/a_n]/\,2$, obtemos $c = [c + a/c]/2$, donde $c^2 = a$, isto é, $\lim_{n \to \infty} a_n = \sqrt{a}$.

Vemos então que todo número real $a > 0$ possui uma raiz quadrada real e, além disso, que o processo iterativo $a_{n+1} = [a_n + a/a_n]/2$, com $n \in$ N* fornece rapidamente aproximações para $\sqrt{a}$.

III - O MÉTODO PARA O CÁLCULO DE RAÍZES UTILIZANDO PRODUTOS NOTÁVEIS

Entre tantos processos para o cálculo de raízes quadradas e raízes cúbicas, não podemos deixar de falar do método que se baseia em produtos notáveis.

Apesar de ser um método extremamente simples, que não exige que os alunos "decorem" resultados mas que busquem a solução do seu problema através de operações aritméticas, esse método é muito pouco utilizado em nossas salas de aula. O que é uma grande perda, porque pode ser uma solução para um problema que preocupa boa parte dos professores: como ensinar o cálculo de raízes quadradas?

Além disso, esse método é rico na aplicação de conceitos, como de múltiplo de um número, de aproximação por falta e de potências, entre outros. Representa ainda uma forte aplicação de um conteúdo bastante polêmico para os alunos, o produto notável.

Vejamos como funciona esse método:

- Consideremos um número natural n (quadrado perfeito), do qual queremos calcular a raiz quadrada.
- Inicialmente, vamos procurar um número natural, múltiplo de 10, que chamaremos de a, cujo quadrado mais se aproxima de n por falta.
- A raiz quadrada de n será um número natural entre a e o múltiplo de 10 imediatamente superior a a, que chamaremos de b, isto é, $a < \sqrt{n} < b$. Podemos escrever $\sqrt{n}$ da seguinte forma: $\sqrt{n} = a + x$, onde $0 \leq x < 10$.
- Quando escrevemos $\sqrt{n} = a + x$, temos uma equação em x e para buscarmos a sua solução vamos elevar ambos os termos da igualdade ao quadrado:

$(\sqrt{n})^2 = (a + x)^2$, ou seja, $n = a^2 + 2ax + x^2$.

O problema que, inicialmente, era calcular a raiz quadrada de n, transformou-se em achar a solução positiva de uma equação do segundo grau e, a partir daí, chegar ao valor que resolve o nosso problema: a raiz quadrada de n.

Quando vamos calcular a raiz quadrada de um número, geralmente recorremos à operação inversa da radiciação, ou seja, a potenciação. Mas nem sempre é fácil calcularmos a raiz quadrada de um número utilizando potência, principalmente quando o número em questão é muito grande. Neste caso, o problema se torna muito mais interessante, porque teremos a solução procurada através de uma equação do segundo grau que pode ser resolvida facilmente.

Atualmente, poucas pessoas calculam desta forma a raiz quadrada, pois em geral, recorrem a uma máquina de calcular ou ao método tradicional para o cálculo da raiz: aquele que busca o resultado a partir da potência.

Talvez a pouca utilização do processo acima descrito, para o cálculo da raiz quadrada seja justificada pela forma como esse método era ensinado nas escolas. Na verdade, muitas vezes era visto como uma "receita" sem explicação.

O que fizemos não foi mostrar como funciona o processo para o cálculo da raiz quadrada, mas sim justificar e explicar este método, para que depois de compreendido e justificado, nós, professores de matemática, possamos vê-lo com mais carinho e também tenhamos a sensibilidade de ensiná-lo aos nossos alunos como um processo prático e útil de aplicação de produtos notáveis e equação do segundo grau, e não como uma "mágica" sem explicação.

Vamos agora descrever esse método para o cálculo da raiz quadrada de n, justificando cada passo. Ao mesmo tempo que aplicamos o dispositivo prático para o cálculo da raiz, a justificativa matemática deste será feita ao lado.

Vamos buscar no conjunto dos múltiplos de 10, o número cujo quadrado mais se aproxima de n por falta, que como já dissemos, chamaremos de a. Temos então:

$\sqrt{n}$	r •
n	

$\sqrt{n} = a + x$ com $0 \leq x < 10$,

onde o(s) dígito(s) de r é(são) o(s) dígito(s) de $a/10$ e será(serão) o(s) primeiro(s) dígito(s) do número correspondente a $\sqrt{n}$. O dígito seguinte que irá compor o número correspondente a $\sqrt{n}$ e que chamaremos de • será o de x. Logo $\sqrt{n}$ será r •, que é o número formado pela justaposição dos algarismos de r e de x. Veremos, a seguir, como determinar x.

Elevamos *a* ao quadrado, colocamos o resultado abaixo de *n* e subtraímos a^2 de *n*.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{n} & r\ \bullet \\ \hline n & \\ -a^2 & \\ \hline n-a^2 & \end{array}$$

$$n = a^2 + 2ax + x^2$$

$$n - a^2 = 2ax + x^2$$

Agora temos que descobrir um número que multiplicado por $2a$ e somado com o seu quadrado resulte $n - a^2$.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{n} & r\ \bullet \\ \hline n & 2ax + x^2 = x - a^2 \\ -a^2 & \\ \hline n-a^2 & \end{array}$$

$$n - a^2 = 2ax + x^2$$

Para isto, dividimos $(n - a^2)$ por $2a$ e observamos se o resto obtido é quadrado do quociente. Caso isto não ocorra, diminuímos o quociente, tomando o cuidado de buscar um quociente x de modo que o resto assim obtido seja x^2, ou seja, $n - a^2 = 2ax + x^2$. Deste modo, temos:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{n} & r\ \bullet \\ \hline n & 2ax + x^2 = x - a^2 \\ -a^2 & \\ \hline n-a^2 & \\ -(n-a^2) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

O termo chamado de • é o valor de x e o resultado encontrado para $\sqrt{n}$ é um número cujo(s) primeiro(s) dígito(s) é(são) o(s) de r e o dígito seguinte é o dígito de x.

Vamos calcular $\sqrt{256}$:

O múltiplo de 10 cujo quadrado mais se aproxima de 256 por falta é 10.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{256} & 1\bullet \\ \hline 256 & \end{array}$$

$$\sqrt{256} = 10 + x \text{, com } 0 \le x < 10.$$

Elevamos 10 ao quadrado, o colocamos abaixo de 256 e subtraímos de 256.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{256} & 1\bullet \\ \hline 256 & \\ -100 & \\ \hline 156 & \end{array}$$

$$(\sqrt{256})^2 = (10 + x)^2$$
$$256 = 100 + 20x + x^2$$
$$256 - 100 = 20x + x^2$$
$$156 = 20x + x^2$$

Dobramos 10 e queremos descobrir o número x que multiplicado por 20 e somado com o seu quadrado resulte 156. Para obtermos este número x, ou um valor aproximado, vamos dividir 156 por 20. Neste caso, $156 = 20.7 + 16$. Como $16 \neq 7^2$, temos que 7 não é o valor procurado. Mas $156 = 20.6 + 36$, assim 6 é o valor de x.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{256} & 16 \\ \hline 256 & 20.6 + 6^2 = 156 \\ -100 & \\ \hline 156 & \end{array}$$

O valor de • que desconhecíamos, é o valor para x encontrado na igualdade $156 = 20x + x^2$. Logo • = 6 e $\sqrt{256} = 16$.

Podemos utilizar também um processo análogo para calcular a raiz cúbica de um número n, utilizando o produto notável $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Vejamos como funciona o processo para o cálculo de $\sqrt[3]{n}$. Usaremos um dispositivo prático análogo ao que foi utilizado para o cálculo da raiz quadrada. Vamos buscar no conjunto dos múltiplos de 10, o número cujo cubo mais se aproxima por falta de n e chamaremos este número de a. Temos então que:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{n} & r\ \bullet \\ \hline n & \end{array}$$

$$\sqrt[3]{n} = a + x \quad \text{com } 0 \le x < 10$$

Observe que o(s) primeiro(s) dígito(s) da $\sqrt[3]{n}$, que são os dígitos de r, será(rão) o(s) dígito(s) de $a/10$ e que • é o valor de x. Elevamos a ao cubo, colocamos o resultado abaixo de n e subtraímos a^3 de n.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{n} & r\ \bullet \\ \hline n & \\ -a^3 & \\ \hline n - a^3 & \end{array}$$

$$(\sqrt[3]{n})^3 = (a + x)^3$$

$$n = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$$

$$n - a^3 = 3a^2x + 3ax^2 + x^3$$

Triplicamos o quadrado de a.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{n} & r\ \bullet \\ \hline n & 3a^2 \\ -a^3 & \\ \hline n - a^3 & \end{array}$$

$$n - a^3 = 3a^2x + 3ax^2 + x^3$$

Agora temos que descobrir um número x, que multiplicado por $3a^2$, somado com o seu quadrado vezes $3a$ e com o seu cubo, resulte $n - a^3$, ou seja, $n - a^3 = 3a^2x + 3ax^2 + x^3$. Vamos então dividir $n - a^3$ por $3a^2$ e encontraremos x ou um valor aproximado pois devemos ter um valor que verifique a igualdade anterior. Assim temos:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{n} & r\ \bullet \\ \hline n & 3a^2x + 3ax^2 + x^3 = n - a^3 \\ -a^3 & \\ \hline n - a^3 & \end{array}$$

O termo que chamamos de • será o valor encontrado para x e o resultado da $\sqrt[3]{n}$ será o número cujo(s) primeiro(s) dígito(s) é(são) o(s) de r e o dígito seguinte é de x.

Vamos calcular $\sqrt[3]{3375}$.

O múltiplo de 10 cujo cubo mais se aproxima de 3375 por falta é 10.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{3375} & 1\bullet \\ \hline 3375 & \end{array}$$

$$\sqrt[3]{3375} = 10 + x$$

Elevamos 10 ao cubo, colocamos o valor encontrado abaixo de 3375 e o subtraímos de 3375.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{3375} & 1\bullet \\ \hline 3375 & \\ -\,1000 & \\ \hline 2375 & \end{array}$$

$$\left(\sqrt[3]{3375}\right)^3 = (10 + x)^3$$
$$3375 = 1000 + 300x + 30x^2 + x^3$$
$$3375 - 1000 = 300x + 30x^2 + x^3$$
$$2375 = 300x + 30x^2 + x^3$$

Triplicamos 10^2

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{3375} & 1\bullet \\ \hline 3375 & 300 \\ -\,1000 & \\ \hline 2375 & \end{array}$$

$$2375 = 300x + 30x^2 + x^3$$

Para chegarmos no número x, vamos dividir 2375 por 300, buscando um valor x para o qual a igualdade $2375 = 300x + 30x^2 + x^3$ seja satisfeita. Neste caso, x = 5 pois: $2375 = 300.5 + 30.5^2 + 5^3$. O valor de • é 5 e chegamos ao resultado: $\sqrt[3]{3375} = 15$.

IV- O MÉTODO DE NEWTON PARA O CÁLCULO DE RAÍZES

Assim como os babilônios desenvolveram um método para o cálculo de raízes quadradas não exatas utilizando aproximações, Isaac Newton (1642-1716) criou outro método, que permite o cálculo de raízes quadradas não exatas também utilizando aproximações. Além disso, o método de Newton tem a facilidade de ser um algoritmo bastante simples para uma implementação computacional.

Antes de descrevermos o método, vamos fazer algumas considerações sobre um número real positivo que chamaremos de a e a sua raiz quadrada.

Sejam b e c números reais positivos tais que $a = bc$. Neste caso temos que:

se $c \geq \sqrt{a}$ então $b \leq \sqrt{a}$; se $c \leq \sqrt{a}$ então $b \geq \sqrt{a}$ de modo que $\sqrt{a}$ pertence sempre ao intervalo de extremidades b e c, isto é, $a \in [b,c]$ ou $a \in [c,b]$, como mostram as figuras 1 e 2:

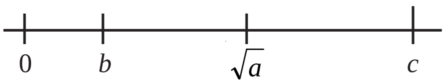

Figura 1

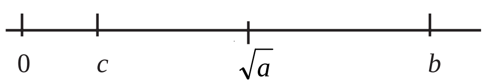

Figura 2

Além disso, como ilustram as figuras 3 e 4, temos:

- se b crescer então c deverá decrescer, isto é, se $a = b'\,c'$ e $b < b'$ então $c' < c$.
- se a crescer então b deverá decrescer, isto é, se $a = b'\,c'$ e $c' < c$ *então* $b' < b$.

Figura 3

Figura 4

Observando as figuras acima, podemos chegar às seguintes conclusões:

- cada intervalo [i,j], onde i > 0 e ij = a contém $\sqrt{a}$
- dados dois intervalos [i,j] e [k,l], com ij = $k_l = a$, se i ∈ [k,l] ou j ∈ [k,l], então [i,j] ⊂ [k,l] ,ou seja, todo intervalo, que contém um extremo de um segundo intervalo, contém integralmente este segundo intervalo;
- as extremidades à esquerda desses intervalos são aproximações por falta de $\sqrt{a}$ com erros cada vez menores, e as extremidades à direita são aproximações por excesso também com erros cada vez menores.

As conclusões obtidas são importantes pois serão úteis para justificar alguns argumentos que são usados no método de Newton.

O método de Newton consiste em determinar uma sucessão de intervalos cada vez menores, todos contendo $\sqrt{a}$, de modo que as amplitudes dos intervalos tendam a zero.

Buscarmos intervalos em que as amplitudes tendem a zero significa que estamos buscando aproximações onde a margem de erro seja cada vez menor.

Como primeira aproximação, vamos considerar o número real positivo, que chamaremos de g, onde $g^2 < a$, ou seja, g se aproxima de $\sqrt{a}$ por falta.

Temos então que $\sqrt{a} \in [g , a/g]$, pois $a = g\ (a/g)$.

Como segunda aproximação, vamos considerar o ponto médio do intervalo $[g, a/g]$, que chamaremos de m. Então $m = ½\,(g + a/g)$. Vamos verificar se m é uma aproximação de $\sqrt{a}$ por falta ou por excesso, para definirmos o segundo intervalo.

Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, temos $m = ½\ (g + a/g)^3 \sqrt{g(a/g)} = \sqrt{a}$, ou seja, $m \geq \sqrt{a}$ **.** Logo, m é uma aproximação por excesso e, além disso, como $m \geq \sqrt{a}$ então $a/m \leq \sqrt{a}$. Assim $\sqrt{a} \in [a/m, m]$ já que $a = (a/m)\ m$.

Observe que $[g, a/g] \supset [a/m, m]$ e, por isso, $g \leq a/m$. A amplitude do segundo intervalo é menor que a metade da amplitude do primeiro intervalo, isto é, $m - a/m \leq ½\ (a/g - g)$, pois $m - a/m \leq m - g$ e $m = ½\,(g + a/g)$.

Continuando este processo, a amplitude do terceiro intervalo será menor que 1/4 da amplitude do primeiro, e o quarto intervalo terá uma amplitude menor que 1/8 da amplitude do primeiro, de modo que a sucessão de amplitudes dos intervalos contendo $\sqrt{a}$ tenderá a zero.

Vamos calcular $\sqrt{a}$, onde $a = 2$, usando o método descrito, com aproximação de quatro "casas decimais".

Temos $g = 1$ pois $g^2 < a$ e $a/g = 2$.

Logo $\sqrt{2} \in [1, 2]$.

Tomemos $m_1 = ½\,(g + a/g) = 3/2 = 1{,}5$.

Daí $a/m_1 = 4/3 = 1{,}3333$ (quatro casas decimais).

Sabemos que m_1 é uma aproximação por excesso de $\sqrt{a}$, logo $\sqrt{2} \in [1{,}3333, 1{,}5] \subset [1, 2]$.

Seja $m_2 = ½\,(m_1 + a/m_1) = 17/12 = 1{,}4166$.

Logo $a/m_2 = 24/17 = 1{,}4118$.

Daí, $\sqrt{2} \in [1{,}4118, 1{,}4166] \subset [1{,}3333, 1{,}5] \subset [1, 2]$.

Consideremos $m_3 = ½\,(m_2 + a/m_2) = 577/408 = 1{,}4142$.

Então $a/m_3 = 816/577 = 1{,}4142$.

Logo $\sqrt{2} \in [1{,}4142, 1{,}4142] \subset [1{,}4118, 1{,}4166] \subset [1{,}3333, 1{,}5] \subset [1, 2]$.

Portanto $\sqrt{2}$ vale aproximadamente, com quatro "casas decimais", 1,4142.

Observe que os intervalos obtidos têm, respectivamente, amplitudes $a/g - g = 1$, $m_1 - (a/m_1) = 0{,}1667$, $m_2 - a/m_2 = 0{,}0048$ e $m_3 - a/m_3 = 0$. Como a aproximação desejada foi de quatro "casas decimais", a seqüência de intervalos nos permite obter o valor 1,4142. Se a aproximação fosse com mais ou menos "casas decimais", teríamos mais ou menos intervalos, conforme o caso.

Empregando uma análise semelhante à que foi feita para a raiz quadrada, é possível mostrar que g e a/g , onde $g \leq a^3$, são extremos opostos de um intervalo que contém $\sqrt[3]{a}$.

Para chegarmos a uma segunda aproximação que chamaremos de m, vamos considerar agora a média ponderada $1/3\,(2g + a/g^2)$ que nos dá uma aproximação melhor para $\sqrt[3]{a}$. Podemos então chegar a um processo análogo para o cálculo de $\sqrt[3]{a}$.

Como já foi dito, o método de Newton pode ser facilmente transformado em um algoritmo computacional, não só para o cálculo de raízes quadradas e raízes cúbicas, mas pode ser estendido para o cálculo da raiz n-ésima. Neste caso, a fórmula de iteração pode ser generalizada a seguinte forma: $m = 1/n\,[(n-1)\,g + a/g^{n-1}]$.

V - CONCLUSÃO

O que apresentamos no nosso texto resgata métodos do cálculo de raízes que não se perderam através dos tempos, mas que foram esquecidos. Acreditamos que a partir dos métodos estudados, podemos tornar o cálculo de raízes mais simples levando os alunos a perceberem o seu significado.

Bibliografia

- BOYER, C. B. *História da Matemática*; tradução: Elza F. Gomide. São Paulo. Edgard Blücher, 1974
- GUELLI, O. História de Potências e Raízes. *Contando a História da Matemática*. n.4. 7 ed. São Paulo. Editora Ätica. 1997.
- LIMA, E. L. *Curso de Análise*, vol. I. Projeto Euclides. Rio de Janeiro. IMPA. 1976
- RPM – *Revista do Professor de Matemática*. n° 21. Sociedade Brasileira de Matemática. 1982.
- SRUIK, D. J. História Concisa das Matemáticas; 4 ed. tradução: João Cosme S. Guerreiro. Lisboa. Gradiva, 1987.