INTERPRETAÇÕES DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Tharcílio Alexandre de Queiroz Ferreira Neto
Bolsista PADCT UFF 96/97

Wanderley Moura Rezende *(Prof. Orientador)*
Mestre em Matemática – IM-UFF
Mestre em Educação Matemática – USU
Professor Assistente – GMA/UFF

INTERPRETAÇÕES DO CONCEITO DE FUNÇÃO

1. Introdução

Cotidianamente nos defrontamos com situações em que é preciso relacionar duas grandezas interdependentes. Por exemplo, o juro de uma aplicação financeira que depende do tempo. Ou o crescimento de uma dada população seja ela humana ou de bactérias. Ou, ainda, a relação entre áreas e medidas de terrenos.

É exemplo clássico o experimento da queda dos corpos, supondo-se realizadas as condições físicas necessárias. Nele, Galileu relaciona a variação da distância percorrida pelo objeto e a variação do tempo decorrido até este encontrar o solo.

O saber em torno de questões como estas deu forma a um instrumento matemático, cuja essência é a correspondência entre dois conjuntos (CARAÇA, 1989), conhecido como função. Este instrumento permite que examinemos situações sob um ponto de vista privilegiado, amplo, de modo a, conhecendo suas nuances, sermos capazes de prever acontecimentos, dando-nos a possibilidade de tomadas de decisão mais lúcidas.

Desde que começou a tomar forma, por volta do séc. XVIII, o conceito de função tem sido considerado sob diferentes aspectos, através do trabalho de matemáticos como EULER, LAGRANGE, HARDY, BOURBAKI, entre outros. A partir da análise histórica da evolução deste conceito, podemos identificar pelo menos três interpretações do conceito de função. A estas chamaremos *categorias* e são essenciais ao estudo que realizamos. São elas: *relação entre conjuntos, relação entre quantidades variáveis e transformação*. Estas três categorias representam as atitudes que podemos assumir diante do termo **função**.

Para alguns, segundo ARCAVI (1987), a imagem mental que possuem do conceito de função pode ser de *relação entre conjuntos*, o que revela uma interpretação deveras estática. Sob este aspecto, função é uma tríade: domínio, contradomínio e uma correspondência entre seus elementos. Esta visão pode obscurecer o dinamismo envolvido na idéia de função como uma *relação entre quantidades variáveis*.

Foi com esta segunda interpretação, aliás, que surgiu o conceito de função. Lagrange (1736-1813) denominou função (...) *"de uma ou várias quantidades alguma expressão para cálculo na qual estas quantidades entram de alguma maneira envolvidas ou não com outras quantidades as quais são consideradas como dadas e com valores invariáveis enquanto as quantidades de função podem assumir todos os valores possíveis. Entretanto, em funções considera-se apenas quantidades que são supostas serem variáveis sem considerar as constantes com as quais podem estar envolvidas"* (PEREIRA, 1995).

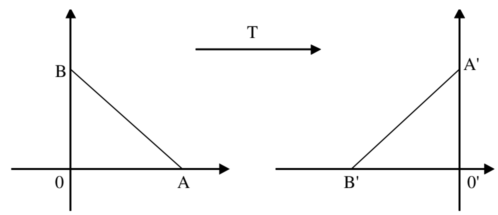


fig.1: exemplo 1

A terceira categoria que relacionamos diz respeito a uma interpretação do conceito de função mais "sofisticada". É a função vista como *transformação*, como aparece usualmente nos cursos de Álgebra Linear. Por exemplo, considere $T:\Re^2 \to \Re^2$ definida por $T(x,y)=(-y,x)$. A função T *transforma* o triângulo *A0B* no triângulo *A'0'B'* por meio de uma rotação de 90º em relação à origem (fig.1). Esta interpretação também dá uma idéia bastante clara do dinamismo que o conceito de função traz em si.

Observamos esta última forma de apresentação em alguns livros didáticos do ensino médio. Neles, surge a imagem da máquina que realiza transformações. Consideremos, por exemplo, o trecho extraído do trabalho de SOUZA (1996) "Pensamos na sentença $f(x)=15x$ como sendo uma *transformadora* da variável x. Assim, a função f toma a variável x e a transforma em 15x. Qualquer valor a que "entrar" em f sairá multiplicado por 15" (fig.2).

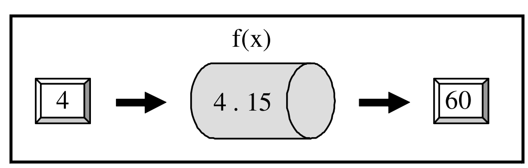


fig. 2

Por ser um instrumento eficaz em muitas das situações que envolvem a Matemática do dia-a-dia e, principalmente, no campo científico, o estudo de função predomina no ensino de nível médio e superior. É mister, então, conhecer que interpretação do conceito de função prevalece no entendimento destes alunos. Com estas finalidades, fizemos uma pesquisa de campo com alunos recém-ingressantes do curso de Engenharia e com alunos do curso de

Licenciatura em Matemática, todos da Universidade Federal Fluminense. As respostas às questões dadas pelos dois grupos foram confrontadas. Os resultados foram aqui tabulados e a análise deles são o principal objeto de estudo deste trabalho.

2. A pesquisa de campo

Foi aplicado um questionário a alunos da Universidade Federal Fluminense, divididos em dois grupos, que designaremos por 1 e 2. O Grupo 1 é constituído, na sua quase totalidade, de alunos de duas turmas do curso de engenharia, que ingressaram no primeiro semestre de 1995. Eram ao todo sessenta alunos, que, em geral, não haviam experienciado ainda uma situação de reprovação no ensino superior. Turmas iniciais do curso de Engenharia são consideradas, pela comunidade acadêmica, de "bom nível" em Matemática. O Grupo 2 era constituído de trinta alunos do curso de Licenciatura em Matemática, das turmas das disciplinas Análise Matemática II (6º período) e Topologia I (5º período). Estes licenciandos estarão provavelmente, em um espaço curto de tempo, lecionando Matemática no ensino de 1º e 2º graus.

No questionário elaborado, tivemos o cuidado de considerar apenas as conquistas já consolidadas pelo aluno, aquelas que fazem parte do que Vygotsky denominou de *zona de desenvolvimento real* (OLIVEIRA, 1995). Os objetivos de cada questão serão explicitados quando da análise dos resultados. O questionário foi preenchido em sala de aula e sem consulta. Com duração média de 60 minutos, procuramos coletar informações que nos permitissem distinguir o que o entrevistado entendia por *função*. Cabe ressaltar, entretanto, que os resultados da quinta questão pelo grupo 2 foram prejudicados pela falta de tempo necessário para a realização da atividade. Por esta razão, estes resultados não serão considerados em nossa análise.

Eis a íntegra do questionário:

1 – Enumere os tipos de funções que você conhece.

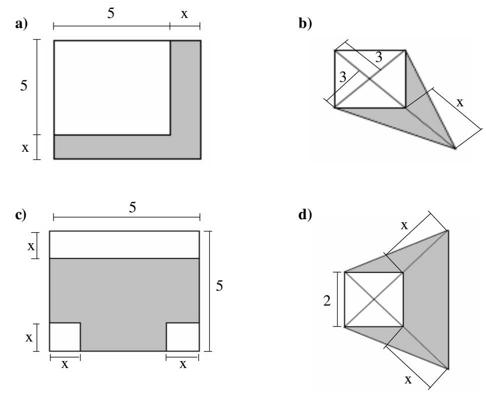
2 – Dê exemplos de três tipos diferentes de funções.

3 – Procure dar o maior número possível de definições e interpretações para o conceito de função.

4 – Dos elementos abaixo, quais deles você considera fundamental para a definição do conceito de função?

( ) domínio *( ) gráfico*
( ) imagem *( ) lei de formação*
( ) contradomínio *( ) uma expressão algébrica*

5 – Em cada um dos itens abaixo, determine a área da figura hachurada em função da variável x, procurando dar o domínio, o contradomínio, a imagem e o esboço do seu gráfico.



Objetivos das questões:

As três primeiras questões têm um objetivo bem específico que é o levantamento das concepções do conceito de função. Este levantamento se dá em três níveis distintos. Na primeira questão, pedimos ao aluno que enumerasse os tipos de funções. Na segunda pergunta, trabalhamos a exemplificação e, na terceira, pedimos que o entrevistado elabore definições e interpretações do conceito de função. Assim, o objetivo destas três questões é investigar que idéia do conceito o aluno traz consigo, que categorias de função ele reconhece; que conceito se forma em sua mente ao colocar-se diante da palavra *função*.

A quarta questão tem como objetivo avaliar se o aluno é coerente ou não com a definição dada por ele na pergunta anterior. "Que elementos são realmente fundamentais para a definição do conceito de função?" Para responder a esta pergunta, bastaria uma leitura das próprias definições e interpretações de função dadas na questão anterior.

O objetivo da quinta questão é verificar se o aluno consegue construir funções a partir de situações-problema, envolvendo áreas de figuras planas, estabelecendo relações entre as quantidades variáveis. O domínio e o contradomínio não são dados, e espera-se que o aluno determine estes elementos, respondendo, assim, que valores podem ser atribuídos às variáveis.

A análise dos resultados:

1 – Enumere os tipos de funções que você conhece.

classes	grupo 1 (%)	grupo 2 (%)
f. reais específicas	84	53
paridade	7	13
injetiva/sobrejetiva	3	17
crescimento	2	6
outros	4	6
não responderam	-	5

A maior parte dos entrevistados, tanto no grupo 1 quanto no grupo 2, não soube classificar em categorias o conceito de função. Eles responderam a esta pergunta com exemplos, o que era solicitado apenas na terceira questão. A classificação que aparece na tabela anterior foi por nós estabelecida. Constatamos que o tipo de função que prevalece no entendimento destes alunos é o das funções reais a uma variável, já que muitos dos entrevistados fizeram classificações de funções quanto à paridade, ao crêscimento, etc. Além disso, os alunos referiram-se apenas às funções reais que lhes foram apresentadas no ensino médio, como a quadrática, linear, exponencial e logarítmica.

Era esperado que os alunos do grupo 2 mencionassem funções de variáveis complexas, transformações lineares, relações entre conjuntos e relação entre quantidades variáveis, já que cursaram disciplinas como Álgebra Linear, Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra, etc.

2 – Dê exemplos de três tipos diferentes de funções.

O entrevistado aqui tem outra oportunidade de mostrar o que entende por função. Dar exemplos é uma alternativa à dificuldade que se tem em definir ou enumerar tipos de funções. É uma questão que surge como complemento da primeira.

classes	grupo 1 (%)	grupo 2 (%)
leis de formação	42	80
expressões analíticas	20	-
operadores	7	-
outros	19	14
não responderam	12	6

A maioria dos entrevistados, nos dois grupos, exemplificou os tipos de funções escrevendo leis de formação de funções específicas aprendidas no ensino médio. Como exemplo podemos citar $f(x)=5x+4$, $y=a^x$ e $f(x)=\ln(x)$. Observamos o fato de que boa parte dos "calouros" de engenharia escreveu como exemplo de funções expressões analíticas como $\mathrm{sen}(x)$, $\ln(x)$, etc., enquanto que, entre os licenciandos de matemática não houve quem cometesse explicitamente este equívoco. Percebemos assim que, ao longo do curso, estes alunos conseguiram dissociar o conceito de função do conceito de expressão analítica. Sabem que uma função *f* pode ser *definida por* uma expressão analítica, mas que a função *f* não é a expressão analítica. Não identificam mais um com o outro, mostrando que não há porque associar a toda função, uma expressão analítica e, muito menos, a toda expressão analítica, uma função. É curioso observar que, na primeira metade do século XVII, Jean Bernoulli identificava funções com expressões analíticas que envolviam apenas uma variável, tal e como fizeram boa parte dos calouros.

No grupo 1, a maioria dos que especificaram funções escreveram uma lei de formação como exemplo. Há uma ocorrência significativa de alunos que identificam a função com a expressão analítica usada para defini-la. Além disso, mencionaram como exemplos alguns operadores, respondendo tão somente " $\log$, $\exp$, $\sqrt{}$, etc.".

Outras respostas como equações algébricas e classificação quanto ao crescimento e à paridade figuraram nos questionários. Apenas um aluno demonstrou perceber algo de relação entre quantidades variáveis ao responder velocidade, força e volume.

Poucos alunos representaram funções através de diagramas, onde os elementos de um conjunto são associados aos elementos do outro, por flechas.

3 – Procure dar o maior número possível de definições e interpretações para o conceito de função.

Observamos que houve dificuldade, em ambos os grupos de entrevistados, em definir o conceito de função. Isto já havia sido previsto, uma vez que o ato de definir exige uma atividade mental mais elaborada. Por isso as duas questões anteriores, onde o aluno pode *classificar* e *dar exemplos* de funções, tarefas mais simples.

categorias	grupo 1 (%)	grupo 2 (%)
relação entre conjuntos	20	54
transformação	4	3
relação entre quant. var.	8	-
expressão algébrica	10	-
representação gráfica	7	3
não respondeu	21	40
erro ao definir	30	-

Podemos observar, através da tabela acima, que a idéia de relação entre conjuntos predomina entre as concepções de definição de função que os entrevistados têm. Os alunos adotaram como referência a definição de função dada por Bourbaki. Em ambos os grupos é esta a postura assumida pelos alunos, já que é a definição "acadêmica" do conceito de função, a mais difundida nos diferentes graus de ensino.

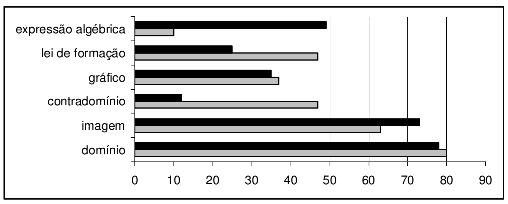
Observamos, porém, contradição com os exemplos dados por eles nas questões anteriores, onde função como relação entre conjuntos quase não se verifica.

No grupo 1, grande parte dos alunos definiu função de uma forma errônea demonstrando desçonhecimento de significado deste conceito. Por exemplo, função seria uma "equação que varia em função de uma variável", "relação entre variáveis e números, que possui um conjunto domínio e imagem", ou ainda, "função é um sistema em que se utiliza incógnitas e operações aritméticas para se chegar a uma conclusão algébrica".

É curioso notar que houve maior incidência da interpretação do conceito de função como transformação e relação entre quantidades variáveis no grupo dos recém-ingressos ao curso superior. Era de se esperar que os licenciandos em matemática, que já cursaram disciplinas relacionadas a estes temas, tivessem um melhor desempenho com relação a esta questão. No entanto, não citaram em suas definições e interpretações do conceito de função a idéia de transformação nem de relação entre quantidades variáveis. Surge então a seguinte questão: em que estas disciplinas contribuíram efetivamente para a construção do conceito de função?

4 – Dos elementos abaixo, quais deles você considera fundamental para a definição do conceito de função?

Os elementos considerados fundamentais pelos alunos para a definição do conceito de função podem ser analisados no gráfico a seguir:



Para responder a esta pergunta bastaria que o aluno fizesse uma leitura da própria definição de função dada na questão anterior. Os elementos que aparecessem em sua formulação seriam os fundamentais para a definição do conceito de função.

Interessante notar que em ambos os grupos a imagem predomina em relação ao contradomínio como elemento fundamental para a definição do conceito de função. O que é uma incoerência, já que a imagem é um elemento determinado a posteriori. Na verdade, o contradomínio ocupa um espaço de muito pouca importância na compreensão que os alunos têm de função, apesar de aparecer na definição dada por eles.

Além disso, metade dos alunos do grupo 1 consideram expressão analítica como elemento fundamental para a definição do conceito de função.

O gráfico passa a ser um elemento importante, o que vem ratificar que os alunos têm em mente funções reais e, geralmente, a uma variável. Exemplos de natureza similar aos citados (exemplos 1 e 2) não são levados em conta pelos estudantes em suas considerações.

5 – Em cada um dos itens abaixo, determine a área da figura hachurada em função da variável a, procurando dar o domínio, o contradomínio, a imagem e o esboço do seu gráfico.

A tabela a seguir, exibe as diversas respostas dadas pelos alunos de Engenharia. As respostas corretas aparecem no início da lista e em negrito. Preferimos analisar apenas as respostas destes alunos, já que na aplicação do questionário aos licenciandos, o tempo foi escasso, comprometendo assim a análise dos resultados.

Os gráficos construídos pelos entrevistados foram os mais distintos possíveis. Assim, optamos por não transcrevê-los para este artigo. No entanto, registramos aqui a dificuldade que os alunos têm em construir o gráfico de funções, quando inseridas em um contexto não usual.

	a		b		c		d	
item	resposta	nº de alunos	resposta	nº de alunos	resposta	nº de alunos	resposta	nº de alunos
Área da fig.	$A(x)=x^2+10x$	44	$A(x)=3\sqrt{2}\ x$	–	$A(x)=25-5x-2x^2$	35	$A(x)=x\left(\frac{x}{2}+\sqrt{2}\right)$	–
	$A(x)=x^2+10x+25$	3	$A(x)=3x$	24	$A(x)=2x^2+5x-25$	4	$A(x)=x\left(\frac{x}{2}+2\sqrt{2}\right)$	2
	$A(x)=5x+5x^2$	2	$A(x)=3x-9$	2	$A(x)=10-2x^2$	4	outros	7
	$A(x)=x^2-10x$	1	outros	10	outros	6	não responderam	51
	outros	5	não responderam	24	não responderam	11		
	não responderam	5						
Domínio	$\mathbb{R}_-$	13	$\mathbb{R}_+$	4	$\mathbb{R}$	15	$\mathbb{R}$	3
	$\mathbb{R}_-^*$	14	$\mathbb{R}_+^*$	3	$\mathbb{R}_+$	3	$\mathbb{R}_-^*$	2
	$\mathbb{R}$	19	$\mathbb{R}$	12	outros	13	outros	4
	outros	7	$x=0$	3	não responderam	29	não responderam	51
	não responderam	17	$[0,+\infty)$	1				
			$x=3$	1				
			não responderam	36				

Contrado-mínio	IR	2	IR	2	IR	2	IR	1
	IR^*	–	IR_+^*	1	IR_+	1	não responderam	59
	IR_-	1	não responderam	57	não responderam	57		
	outros	–						
	não responderam	57						
Imagem	IR	8	IR	10	IR	6	$y = -4$	1
	IR_-	7	IR_+	6	IR_+	3	IR_-	1
	$[-25, +\infty)$	5	outros	4	(0,25)	2	(0,2)	1
	IR_-^*	2	não responderam	40	(–8 ; 15,625)	2	x=-16	1
	$\{y \in IR ; y=25\}$	2			x=-25	2	[1 , +8)	1
	outros	12			outros	9	não responderam	55
	não responderam	24			não responderam	36		

Os alunos recém-chegados do segundo grau não são capazes de determinar a área da figura háchurada, a não ser em casos mais simples. Nos itens *b* e *d*, onde a figura é mais elaborada, os entrevistados apresentam grande dificuldade em responder às perguntas. Os poucos que responderam, o fizeram incorretamente.

Cerca de metade dos alunos não soube determinar o domínio em alguns dos itens propostos. Os demais apresentaram respostas diversas, sendo que poucos responderam com acerto. Este quadro é preocupante, uma vez que o domínio é um elemento fundamental no conceito de função, assim como o contradomínio.

Conclusão:

A definição formal de função que predomina em ambos os grupos é a de relação entre conjuntos. Uma definição estática, fácil de memorizar, mas que é descartada no momento em que é pedido um exemplo de função. Os entrevistados escrevem, então, uma expressão analítica ou numa lei de formação, deixando de estabelecer relações entre conjuntos. Apresentam, ainda, muita dificuldade para determinar o domínio e o contradomínio, apesar de apontados como elementos fundamentais da definição do conceito de função.

A maioria dos entrevistados exemplifica quando se é pedido que classifique. Não são capazes de distinguir as ações de *classificar*, *exemplificar* e *definir*. Além disso, citam apenas as funções reais a uma variável que lhes foram apresentadas no ensino médio.

Os licenciandos em matemática não mencionam transformações lineares ou a idéia de função como relação entre quantidades que variam. É motivo de surpresa uma vez que cursaram disciplinas durante o curso que privilegiam abordagens como estas do conceito de função.

O quadro que vemos delinear-se aqui, pede a nós professores, uma atitude mais crítica diante do modo como temos apresentado o conceito de função aos nossos alunos. Não tem sido um modo eficaz, já que anula o poder deste instrumento tão útil a ponto de o aluno não ser capaz de aplicá-lo em cálculo de áreas. Faz-se urgente o resgate do caráter dinâmico deste conceito, procurando fazer relações com situações cotidianas as mais diversas. O desenvolvimento histórico deste conceito tem muito a nos orientar nesta busca.

Bibliografia

ARCAVI, A., *Geometrical Adventures in Functionland; Mathematics Teacher* (pp.346-352), 1990.

CARAÇA, B. de J., *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Liv. Sá da Costa Editora, Lisboa; 1989.

OLIVEIRA, M. K., *VYGOTSKY: Um Processo Sócio Histórico*. Ed. Scipione, Rio de Janeiro, 1995.

PEREIRA, L.M.C., *A Evolução do Conceito de Função*. Projeto Fundão (UFRJ e GEPEM), 1995.

SOUZA, M.H.S., *Matemática, 2º grau*. Livro do professor. São Paulo, Scipione, 1996.