CENTENÁRIO DA INTEGRAL DE LEBESGUE(*)(**)

Paulo Adauto Medeiros

Instituto de Matemática – UFRJ

Rio de Janeiro, RJ - 2002

(*)Texto de conferências ministradas no Instituto de Matemática - UFF; no LNCC-MIT; Instituto de Matemática - UERJ; VI Semana da Matemática do Instituto de Ciências Exatas - UFR-Rural RJ; Departamento de Matematica-UEM.

(**)Primeira versão publicada na Revista Uniandrade, Vol. 3, xi.2 (2002), pp.l-5. Autorizada por Clovis Pereira da Silva, Editor Chefe.

CENTENÁRIO DA INTEGRAL DE LEBESGUE

1. Introdução

Nas disciplinas básicas de Análise Matemática costuma-se iniciar a noção de integral para as funções contínuas, como fez Cauchy (1789-1857) em seu livro "Le Calcul Infinitesimal, Paris, 1823, Tome Premier p. 81." Serão resumidas suas idéias como vem a seguir. Seja f: [a, b] $\to \mathbf{R}$ uma função contínua e P a partição de [a, b]

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Escolhe-se um ponto $x_{k-1} < \xi_k < X_k$, k = 1, 2,... , n e define-se a soma $S(f, P)$ correspondente à partição P do modo seguinte:

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} (x_x - x_k) f(\xi_k).$$

Seja $\lambda(P)$ = máx$\{x_k - x_{k-1}$ k = 1, 2, ... , $n\}$. Demonstra-se que sendo f contínua em [a, b] existe o limite de $S(f, P)$ quando $\lambda(P) \to 0$. A este limite denomina-se integral de Cauchy da f em [a, b] denotando-se por

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(\xi_k).$$

Um problema central que se põe é a relação entre a integral de f e sua derivada f', caso esta exista. Demonstra-se que se f for contínua em [a, b] e possui uma derivada f' contínua em [a, b] então

$$\int_a^b f'(x)\, dx - f(b) - f(a). \qquad (1.1)$$

Esta igualdade denomina-se Teorema Fundamental do Cálculo ou Fórmula de Newton-Leibniz.

Observação 1. Newton considerava a noção primitiva de f isto é, urna função g (derivável cuja derivada g' fosse igual a f. Assim g seria $\int f$ com o símbolo $\int$ representando o inverso da derivada. Ter-se-ia $c \pm \int f$ possui derivada f. Por outro lado Leibniz imaginava a integral de f como a medida da área A do conjunto formado pelo gráfico de f o eixo dos x e as ordenadas $x = a$ e $x = b$, suponha f positiva para fixar idéias. Portanto, para Leibniz

$$A = \int_a^b f(s)\,ds.$$

Cauchy definiu um conceito de integral como Leibniz e relacionou com o de Newton por meio da (1.1) que, por esta razão, denomina-se fórmula de Newton-Leibniz. Quando *g* for contínua mostra-se que uma primitiva de *g* é

$$f(x) = \int_a^x g(s)\,ds$$

isto é, $f' = g$.

Nas etapas seguintes do ensino da Análise Matemática procura-se, em um primeiro estágio, estender a noção de integral dada por Cauchy e a fórmula de Newton--Leibniz a uma classe mais ampla de funções que não sejam, em princípio, necessariamente contínuas em $[a, b]$. Numa primeira fase deste processo encontram-se as idéias de Riemann (1826-1866) reformuladas por Darboux (1842-1917) as quais serão relembradas a seguir.

Portanto, supõe-se $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ apenas *limitada.* Considera-se uma partiçao *P* de $[a, b]$ como no caso anterior de Cauchy. Represente-se por $s_k = \inf\{f(x);\, x_{k-1} < x < x_k\}$ e $S_k = \sup\{ f(x);\, x_{k-1} < x < x_k\}$ para $k = 1, 2, \ldots, n$ isto é, o ínfimo e o supremo de *f* em $[x_{k-1}, x_k]$. Deste modo, são definidas as somas de Riemaun-Darboux inferior *s(f, P)* e superior *S(f, P)* cio modo seguinte:

$$s(f, P) = \sum_{k=1}^{n} (x_{k-1} - x_k)s_k \quad \text{e} \quad S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} (x_{k-1} - x_k)S_k,$$

de *f* correspondente à partição *P*. Quando *P* varia, obtém-se os conjuntos numéricos $\{s(f, P)\}$ limitado superiormente e $\{S(f, P)\}$ limitado inferiormente. Assim, $\{s(f, P)\}$ possui um supremo e $\{S(f, P)\}$ possui um ínfimo. Define-se, portanto, as integrais inferior e superior, por

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_P\{s(f,P)\} \quad \text{e} \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_P\{S(f,P)\}.$$

Tem-se para toda *f* limitada

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Quando estas integrais forem iguais diz-se que a função limitada *f* em $[a, b]$ éintegrável segundo Riemnann e representa-se por

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Demonstra-se que se $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$, limitada, for integrável à Riemann então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{k-1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

onde $x_{k-1} < \xi_k < x_k$.

Prova-se que toda função f contínua em [a, b] *é* integrável à Riemann e as integrais de Riennann e Cauchy de f são iguais. Logo a classe das funções contínuas está contida na classe das integráveis à Riemann. Seria tão grande a classe das funções limitadas f integráveis à Riemann em comparação com as contínuas? A observação a seguir dá uma resposta a esta questão.

Observação 2. Diz-se que urna parte E de [a, b] possui medida nula, quando para cada $\varepsilon > 0$ existe uma partição P de [a, b] tal que a soma das amplitudes dos intervalos de P, cuja união contém E, *é* menor que ε. Uma função $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ diz-se quase contínua quando a coleção dos pontos x de [a, b] nos quais f não é contínua possui medida nula. Lebesgue (1875-1941) demonstrou que uma condição necessária e suficiente para que uma função f: [a, b] $\to$ **R**, limitada, seja integrável segundo Riemann é que f seja quase contínua.

Retorne-se à análise da relação entre a integral e a derivada no caso Riemnann. Poder-se-ia pensar que se f limitada em [a, b] integrável segundo Riemnann e derivável com derivada f' limitada, valesse a fórmula de Newton-Leibniz. Não é verdade. Há muitos exemplos mostrando que é falsa a asserção acima.

Proposição 1. Seja f: [a, b] $\to$ **R** limitada integrável à Riemann, derivável em [a, b] com derivada f' integrável à Riemann, então vale a igualdade

$$(R)\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Demonstração: Considere-se uma partição P de [a, b]. Obtém-se para esta partição

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \left[f(x_k) - f(x_{k-1})\right].$$

Pelo teorerna do valor intermediário de Lagrange obtém-se

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}), \quad k = 1, 2, ..., n,$$

para $x_{k-1} < \xi_k < x_k$. Daí resulta

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

sendo f' integrável segundo Riemnann, quando $\lambda(P) \to$ O obtém-se, desta igualdade,

$$f(b) - f(a) = (R)\int_a^b f'(x)\,dx.$$

2. Integral de Lebesgue

Resumindo o que foi dito na Introdução, conclui-se o seguinte:

- Cauchy (caso contínuo). Se *f:* [*a, b*] → **R** for contínua com derivada *f'* contínua em [*a*, *b*] vale a fórmula de Newton-Leibniz:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx.$$

- Riemnann (caso limitado). Se *f:* [*a, b*] → **R** for limitada e integrável à Riemanmn derivável com derivada *f'* integrável à Riemann então vale a fórmula de NewtonLeibniz:

$$f(b) - f(a) = (R)\int_a^b f'(x)\,dx.$$

Foi observado que a classe das funções integráveis à Riemann é constituída pelas funções *f* que são quase contínuas em [*a*, *b*].

Em 1901 Lebesgue publicou uma nota no C.R. Acad. Sci. Paris, 132 (1901) pp 86-88, na qual propõe um novo conceito de integral contendo como caso particular a de Riemann, conseqüentemente a de Cauchy, eliminando várias deficiências destas integrais e, em particular, dando uma resposta mais geral sobre a validade da fórmula de Newton-Leibniz.

Antes da análise da idéia de Lebesgue sobre a noção de integral é oportuno chamar a atenção que em 2001 foi comemorado o centenário desta idéia, decisiva para o desenvolvimento da matemática do século XX em diante. Na nota de Lebesgue, anteriormente mencionada, encontram-se seis linhas sintetizando sua nova criação, simples e genial.

Dada a importância da idéia de Lebesgue ao definir a nova noção de integral, foi que a "section des Mathématiques de l'Académie de Science de Paris" Publicou uma nota sobre o centenário da integral de Lebesgue (cf. Jeamm Michel BONY, Gustave CHOQUET, Gilles LEBEAU. Le cemitenaire de l'intégrale de Lebesgue, C.R.. Acad. Sei. Paris, t 332, Serie 1 (2001) pp 85-90, avec commentaires de Ph. G. Ciarlet et B. Malgrange).

Analisando a definição de integral de Riemann observou Lebesgue, cf. op. cit., que no caso *f:* [a, *b*] → **R** monótona com *m, M* o ínfimo e o supremo da *f,* qualquer partição *P* do intervalo [m, *M]* isto é,

$$m = y_0 < y_1 < \dots < y_{n-1} < y_n = M,$$

corresponde uma partição *P* de [a, *b*] em intervalos abertos dada por

$$a = x_0 < x_1 < .... < x_{n-1} < x_n = b$$

sendo

$$]\, x_{k-1}, x_k\, [\;= \{\, x \in [a, b];\ y_{k-1} < f(x) < y_k \,\}$$

para k = 1, 2, . . . , *n.* Veja Figura 1 para o caso crescente.

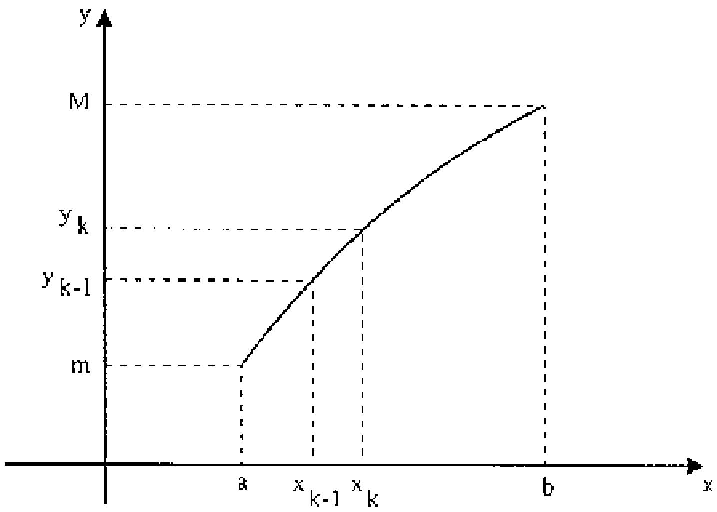

Fig. 1

Conclui-se que no caso em que *f* é monótona é indiferente considerar partições *P* de [*a*, *b*] ou de [*m, M*] para definir as somas de Riemann

$$s = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}(x_k - x_{k-1}) \quad \text{e} \quad S = \sum_{k=1}^{n} y_k(x_k - x_{k-1}).$$

Sendo *f* crescente limitada em [*a*, *b*] quando $\lambda(P) \to 0$ as somas *s* e *S* convergem para um único limite que é a integral de Riemann.

Suponha que f: [a, *b*] $\to$ **R** não seja monótona, porém ainda limitada com *m* o ínfimo e *M* o supremo. Seja *P* uma partição de [*m, M*]. Neste caso os conjuntos não são necessariamente intervalos abertos. Veja Figura 2.

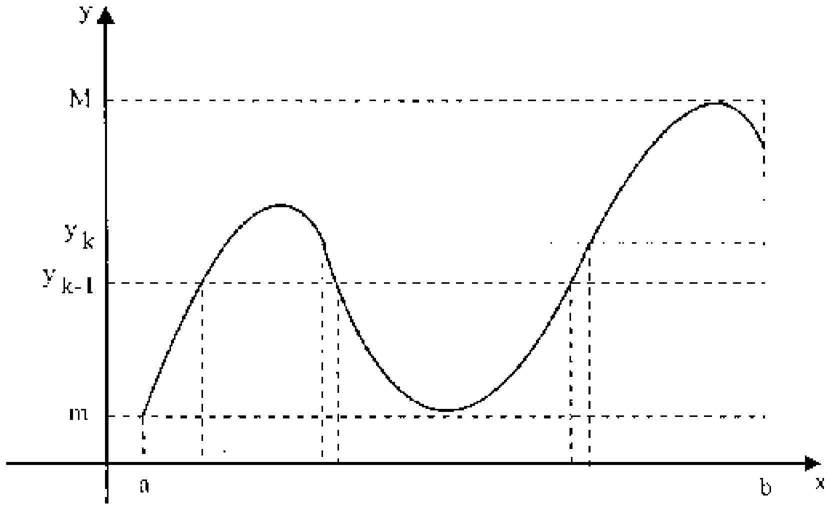

Fig. 2

Examinando a Figura 2 observa-se, para este gráfico, que *Ek* não é um intervalo aberto mas sim a união de três intervalos abertos e disjuntos, logo não é um intervalo. Quando f oscila bastante em $[a, b]$ os conjuntos E_k são bem diferentes de intervalos. Note-se que eles serão sempre subconjuntos abertos de [*a,* b]. Deste modo, Lebesgue observa op. cit. que, caso saibamos atribuir aos E_k uma medida ,$\mu(E_k)$, será possível definir as somas s e S, como no caso monótono, correspondente a partições P de $[n, M]$ em subintervalos abertos $]y_{k+1}, y_k[$ que dão origem, por meio de f, aos conjuntos abertos E_k. De fato, é suficiente definir

$$s = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\,\mu(E_k) \text{ e } S = \sum_{k=1}^{n} y_k\,\mu(E_k)$$

O problema que restou reside na função f, isto é, quais as funções limitadas f em $[a, h]$ tais que seja possível obter conjuntos E_k mensuráveis, isto é, aos quais é possível atribuir uma medida $\mu(E_k)$? Deste modo escolheu na classe das funções f aquelas que possuem a propriedade seguinte: para cada $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, o conjunto

$$\{x \in [a, b];\ \alpha < f(x) < \beta\}$$

é mensurável, isto é, a ele pode-se atribuir uma medida.

Assim ele prova que se f: $[a, b] \to \mathbf{R}$ for limitada e mensurável então as somas

$$s = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\,\mu(E_k) \quad \text{e} \quad S = \sum_{k=1}^{n} y_k\,\mu(E_k)$$

convergem para um número único L quando $\lambda(P) \to 0$, P partição $m = y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1} < y_n = M$ de $[\, m, M\,]$.

Ao número L denominou a integral da função f limitada e mensurável em $[a, b]$. Ao número L denomina-se, atualmente, integral de Lebesgue de f em $[a, b]$ e denota-se por

$$(L)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Demonstra-se que se *f* limitada for integrável à Riemamm ela é à Lebesgue e as integrais coincidem.

Feito isto ele ficou devendo a noção de conjunto mensurável. Assim toma-se um subconjunto E de $]\,a, b[$. Consideram-se conjuntos enumeráveis de intervalos abertos $]\,\alpha_k,\beta_k\,[$ de $(\,a, b\,)$ tais que $E \subset \mathrm{U}\ ]\,\alpha_k\,,\ \beta_k\,[$. A cada união corresponde um número positivo que é a soma da série $\sum(\beta_k — \alpha_k)$. Deste modo quando varia a sucessão dos ($]\,\alpha_k,\beta_k\,[$) obtém-se um conjunto de números positivos constituído das somas das séries. Ao ínfimo deste conjunto denomina-se medida de E e represemmta-se por $\mu(E)$. Seja E^C o complemento de E em $]a, b[$. Do mesmo modo tem-se $\mu(E^C)$. Diz-se que o conjunto $E \subset]a, b[$ é mensurável quando $\mu(E) + \mu(E^C) = b — a$. Note-se que $\mu(]a,b[) = b — a$.

Retornando à partição P de $[m, M]$, supondo f limitada e mensurável em $[a, b]$ resulta que os conjuntos E_k, $k = 1, \ldots, n$ são mensuráveis e a definição de integral dada por Lebesgue é perfeita.

A integral de Lebesgue permite reformular muitos conceitos de Análise Matemática de modo muito mais claro e natural. Assim, a convergência de sucessões de funções, séries de Fourier, integração termo a termo de sucessões etc, são bem mais simples com as idéias de Lebesgue. Com a noção de distribuição de Schwarz épossível definir de modo natural os espaços de Sobolev que se baseiam na noção de integral de Lebesgue. Estes espaços são naturais para o estudo de problemas de contorno para as equações diferenciais parciais. Veja J.-L. Lions, Problémes aux limites dans les équations aux dérivées partielles - Oeuvres choisis de Jacqucs-Louis Lions, Volume 1, SMAI, EDP Scicnces, Paris, 2003, pp 451-576. É mister observar que os conjuntos de medida nula não influenciam nas demonstrações. Assim, toda função quase contínua (cf. Introdução), é integrável à Lebesgue. Daí, as integráveis a Riemann são integráveis à Lebesgue. Toda a teoria de Lebesgue se passa a menos de conjuntos de medida nula. Uma propriedlade que vale em um conjunto a menos de um conjunto de medida nula diz-se uma propriedade *válida quase sempre*. A seguir, analisa-se a fórmula ele Newton-Leibniz com a integral de Lebesgue.

- (Lebesgue). Seja. $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ limitada e mensurável, derivável em $[a, b]$ com derivada f' limitada. Então f' é integrável à Lebesgue e vale a fórmula de Newton-Leibniz

$$f(b) - f(a) = (L)\int_a^b f'(x)\,dx.$$

Será feito um resumo da demonstração. Inicialmente estende-se f ao intervalo $[a, b + 1]$ definindo-se

$$f(x) = f(b) + (x - b) f'(b) \text{ em } [b, b + 1].$$

Assim, f é contínua e possui derivada limitada em $[a, b{+}1]$ quase sempre. Considere-se a sucessão

$$\varphi_n(x) = n\left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right], \quad a < x < b,\ n = 1, 2, \ldots$$

de onde resulta

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f'(x) \tag{2.1}$$

As φ_n são mensuráveis pois f é contínua. Logo f' é mensurável como limite de mensuráveis (Lebesgue). Por hipótese f' é limitada e sendo mensurável ela é integrável à Lebesgue.

Do teorema de valor intermediário de Lagrange, obtém-se

$$\varphi_n(x) = n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right] = f'\left(x+\frac{\theta}{n}\right), \quad 0 < \theta < 1.$$

Logo, sendo f' limitada daí resulta que a sucessão (φ_n) é limitada. Do teorema da convergência limitada de Lebesgue resulta de (2.1)

$$(L)\int_a^b f'(x)\,ds = \lim_{n\to\infty}(L)\int_a^b \varphi_n(x)\,dx.$$

Vale o teorema do valor intermediário para integral de f. Logo,

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,dx = n\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)\,dx - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\,dx = f\left(b+\frac{\theta'}{n}\right) - f\left(a-\frac{\theta''}{n}\right)$$

com $0 < \theta', \theta'' < 1$.

Sendo f contínua, tomando limite quando $n \to \infty$, obtém-se

$$(L)\int_a^b f'(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}(L)\int_a^b \varphi_n(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

É importante observar que da fórmula de Newton-Leibniz resulta que se $a < x < b$ tem-se

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(s)\,ds,$$

permitindo reconstruir a função f por meio de sua derivada.

Cumpre registrar que o ensino da Integral de Lebesgue foi introduzido nos cursos de Matemática da FNFi da UB desde os anos 40 por José Abdelhay. Veja por exemplo José Abdelhay - Introdução ao Estudo da Integral de Lebesgue das Funções Reais de uma Variável Real, Rev. Bras. Est. n° 13 ano IV (1943) pp 115-131.

3. Complementos

A resposta de Lebesgue para a validade da fórmula de Newton-Leibniz exige que a derivada seja limitada. Daí indagar-se se não seria possível obter um conceito de integral para o qual valesse a fórmula de Newton-Leibniz em condições mais gerais. De modo preciso, obter um conceito de integral $I^{\,b}_{\,a}\, f$ de modo que se f pertence à classe $H(a,\, b)$ das funções integráveis com este conceito, for derivável, entao f' pertence à classe $H(a,\, b)$ e vale a fórmula de Newton-Leibniz

$$I_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a).$$

Inicialmente este problema central da Análise Matemática no início do século XX foi resolvido por A. Denjoy em 1912 obtendo um conceito de integral, contendo o de Lebesgue e resolvendo o problema da reconstrução de uma função por meio de sua derivada, ou seja, a fórmula de Newton-Leibniz. Simultaneamente O. Perron em 1914, idealizou um processo de integração contendo o de Lebesgue e resolvendo o problema de reconstrução da função por meio de sua derivada (cf. I.P. Nathanson, Theory of Functions of a Real Variable, Vol. II**,** (1960) Fred. Ungar. Publ. Co. N.Y.). Os processos mencionados tiveram como motivação a integral de Lebesgue. Em 1960 foi investigado por R. Henstock um processo de integração com o objetivo da reconstrução de uma função por meio de sua derivada porém baseado nos processos de Cauchy e Riennann. Ele denominou Integral de Riemann Generalizado e muitos autores denominam Integral de Kurzweil-Henstock. Para as idéias iniciais consulte-se R. Henstock **-** A Riemann type integral xvith Lebesgue power, Indian J**.** of Math. 20 (1968) pp 79-87. Há uma excelente exposição em R.G. Bartle, Return to the Riemann Integral, Amer. Math. Monthly (1966) pp 625-632. J. Kurzweil, Generalized ordinary differential equatious and continuous dependence ou a parameter, Czechoslovak Math. Journal (82) (1957) pp 418-446.

A seguir será feita, de modo sucinto, a construção da integral de Henstock.

Considere-se uma função $f\colon\ [a,\ b] \to \mathbf{R}$. Uma partição P na qual escolhe-se um ponto t_k em cada subintervalo $]\ x_{k-1},\ x_k\ [$ diz-se indexada. Denota-se por

$$P = \{[x_{k-1},\ x_k], t_k\}_{1 \le k \le n}$$

uma partição indexada.

Considere-se a soma de Riemann de f, correspondente à P indexacla, dada por

$$S(f,\ P) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\, f(t_k)$$

Integral de Riemann - Diz-se que um número I é a integral ele Riemann de f em $[a,\ b]$, quando para cada $\varepsilon > 0$ existe uma constante $\delta_\varepsilon > 0$ tal que

$$\left| S(f,P) - I < \varepsilon \right|$$

para toda partição P tal que sua amnplitude máxima $\lambda(P) <$ é δ_ε.

A grosso modo o conceito de integral de Henstock consiste em deixar o δ_ε variável como uma função em $[a,\ b]$. Para isto algumas definições são fixadas.

Calibre sobre *(a, b)* **-** Denomina-se um calibre sobre *]a, b[* a uma qualquer função δ: [*a, b*] → **R** estritamente positiva.

Partição δ-fina **-** Considere-se um calibre δ sobre]*a, b*[e $P = \{[x_{k-1}, x_k], t_k\}_{1 \leq k \leq n}$ uma partição indexada de [*a, b*]. Diz-se que *P* é δ-fina quando

$$0 < x_{k\text{-}1} - x_k < \delta(tk) \text{ para } k = 1,2,...,n.$$

Demonstra-se que conhecido um calibre existe uma partição δ-fina (veja R.A. Gordou, The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock, AMS (1995), USA).

Integral de Riemann Generalizada (Henstock 1996) **-** Um número *H* denomina-se integral de Riemnann Generalizada da função limitada *f:* [*a, b*] → **R** , quando para cada $\varepsilon > 0$, existe um calibre δ_ε sobre *]a, b[* tal que

$$S(f,P) - H < \varepsilon,$$

para toda partiçao $P = \{[x_{k-1}, x_k], t_k\}_{1 \leq k \leq n}$ que seja δ_ε fina.

O número *H* com esta propriedade denomina-se integral de Riermann generalizada e representa-se por

$$H = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Denota-se por $\mathfrak{R}^*$ (*a*, *b)* a classe das funções *f* que possuem integral de Riemann generalizada.

Exemplos

1. A classe elas funções integráveis a Riernann $\mathfrak{R}$ (a, *b)* está contida em $\mathfrak{R}^*$ (a, *b).*

2. Considere a função caracteristica dos racionais de (0, 1) elenomimmada função de Dirichlet. Representando por χ esta função, obtém-se $\chi(x) = 1$ se *x* racional e $\chi(r) = 0$ nos outros pontos de (0,1), nos irracionais. Será demonstrado que $\chi \in \mathfrak{R}^*(0,1)$ e $\int_0^1 \chi(x)\, dx = 0.$

De fato, o problema principal é definir um calibre δ_ε sobre (0, 1) para cada $\varepsilon >$ O. Dado $\varepsilon > 0$ define-se a função real δ_ε em [0, 1] do modo seguinte:

$$\left| \begin{array}{l} \delta_\varepsilon(x) = 1 \quad \text{se } x \text{ for irracional} \\ \delta_\varepsilon(r_k) = \dfrac{\varepsilon}{2^{k+1}}, k = 1, 2, \ldots, \text{ nos racionais } r_k. \end{array} \right.$$

A função δ_ε é um calibre em]0, 1[. Considere a partição indexada

$$P = \{[x_{k-1}, x_k], t_k\}_{1 \leq k \leq n}$$

que seja δ_ε fina, sendo δ_ε acima definida. Então

$$[x_{k-1}, x_k] \subset \left(t_k - \frac{1}{2}\delta_\varepsilon(t_k), t_k + \frac{1}{2}\delta_\varepsilon(t_k)\right)$$

para $x_{k-1} \leq t_k \leq x_k$. Ver definição de δ_ε fina. Note-se que há, no máxino, dois subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ possuindo $\boldsymbol{r_k}$ para índice cuja amplitude de cada um é menor ou igual a $(\varepsilon / 2^{k+1})$

Logo, a contribuição para $S(\mathcal{X}, P)$ dos intervalos $[x_{k-1}, x_k]$ com $t_k = r_k$, para índice de P, é menor ou igual a $\varepsilon / 2^k$. A contribuição para $S(\mathcal{X}, P)$ das parcelas com índice t_k. irracional é zero, pois $\mathcal{X}(t_k) = 0$. Conseqüintemente:

$$[x_{k-1}, x_k] \subset \left(t_k - \frac{1}{2}\delta_\varepsilon(t_k), t_k + \frac{1}{2}\delta_\varepsilon(t_k)\right)$$

pala cada $\varepsilon > 0$. Isto prova que a $\mathcal{X}$ possui uma integral de Riemann generalizada igual a zero.

Não é verdade que se $f \in \mathfrak{R}^*(a, b)$ resulte que seu valor absoluto $|f|$ pertença a $\mathfrak{R}^*(a, b)$. *Isto não acontece corri a integral de Lebesgite.* Sabe-se que se f é integrável à Lebesgue em (a, b) o mesmo acontece com seu valor absoluto $|f|$ e reciprocamnente. A reconstrução de uma função f por meio de sua derivada com a integral de Lebesgue exige que a derivada f' seja limitada. Entretanto no caso da integral de Riemann generalizada este resultado é mais geral como pode ser visto a seguir.

Teorema Fundamental. Suponha que f possua integral de Riemann generalizada e seja derivável em $[a, b]$. Então sua derivada f' possui integral de Riemann generalizada e vale a fórmula de Nexvton-Leibniz

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Demonstração: Seja $t \in [a, b]$ e $f'(t) = g(t)$, isto é,

$$\lim_{z \to t}\left(\frac{f(z) - f(t)}{z - t} - g(t)\right) = 0.$$

Portanto, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon(t) > 0$ definida para $t \in [a, b]$ tal que

$$\left|\frac{f(z) - f(t)}{z - t} - g(t)\right| < \varepsilon \text{ para todo } z \in [a, b]$$

tal que $0 < |z - t| < \delta_\varepsilon(t)$.

Note-se que $\delta_\varepsilon(t)$ assim obtido é um calibre em $[a, b]$. Da desigualdade anterior obtém-se

$$| f(z) - f(t) - (z - t)g(t) | < \varepsilon \, | z - t |,$$

para todo $z \in [a, b]$ tal que $0 < | z - t | < \delta_\varepsilon(t)$. Portanto, para $a \leq \xi \leq t \leq \eta \leq b$ com $0 < \eta - \xi < \delta_\varepsilon(t)$, resulta que

$$|f(\eta) - f(\xi) - (\eta - \xi)g(t)| \leq |f(\eta) - f(t) + (\eta - t)g(t)| +$$
$$|f(t) - f(\xi) - (t - \xi)g(t)| < \varepsilon(\eta - t) - \varepsilon(t - \xi) = \varepsilon(\eta - \xi).$$

Considere-se a partição indexada

$$P = \{[x_{k-1}, x_k], t_k\}_{1 \leq k \leq n}$$

ele $[a, b]$, da qual obtém-se:

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})).$$

Resulta que

$$|f(b) - f(a) - S(g, P)| = \left| \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) - \sum_{k=1}^{n} g(t_k)(x_k - x_{k-1}) \right| \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} f(x_k) - f(x_{k-1}) - g(t_k)(x_k - x_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^{n} \varepsilon(x_k - x_{k-1}) - \varepsilon(b - a)$$

para todo $\varepsilon > 0$.

Conclui-se que $g = f'$ possui integral de Riemann generalizada e

$$\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a).$$

4. Integrais Impróprias Segundo Cauchy-Riemann e Lebesgue

No que ficou analisado até aqui as funções f: $[a, b] \to \mathbf{R}$ são definidas em intervalos compactos. Suponha funções do tipo f: $[a, +\infty[\to \mathbf{R}$, em intervalos não limitados. O que entender-se-ia por integral segundo Cauchy-Riemann e Lebesgue?

Inicia-se com a de Cauchy-Riemann. Considere-se f: $[a, +\infty[\to \mathbf{R}$ e $[a, b]$ contido em $[a, +\infty[$. Supõe-se que f restrita a cada subintervalo $[a, b]$ seja integrável segundo Cauchy-Riemann. Resulta que a função

$$\varphi(b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

é bem definida em $[a, +\infty[$. Quando existe lim *g(b),* finito, diz—se que *f* possui integral imprópria segundo Cauchy-Riemann em $[a, +\infty[$ e denota-se:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Aqui refere-se ao livro L.A. Medeiros - 5. Malta - J. Limaco - H.R. Clark — Lições de Análise Matemática, Parte 2, Complementos e Exercícios, IM-UFRJ, 2003.

No §55 op. cit. prova-se que a função f: $[0, \infty[\to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = \left| \begin{array}{lll} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se} & 0 < x < +\infty \\ 1 & \text{se} & x = 0, \end{array} \right.$$

possui integral imprópria segundo Cauchy-Riemann em $[0, +\infty[$.

Para comparar com Lebesgue define-se seu conceito de integral imprópria. De fato, considere-se f: $[a, +\infty[\to \mathbf{R}$. Denomina-se parte positiva f^+ e negativa f^- de f, as funções definidas em $[a, +\infty[$ do modo seguinte:

$$f^+(x) = \left| \begin{array}{lll} f(x) & \text{se} & f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se} & f(x) < 0 \end{array} \right. \quad \text{e} \quad f^-(x) = \left| \begin{array}{lll} -f(x) & \text{se} & f(x) < 0 \\ 0 & \text{se} & f(x) > 0 \end{array} \right.$$

Resulta que f^+ e f^- são positivas e

$$f = f^+ + f^-$$

Define-se $|f|$, módulo de f, por $|f|(x) = |f(x)|$, portanto

$$|f| = f^+ + f^-$$

Considere-se f: $[a, +\infty[\to \mathbf{R}$ integrável à Lebesgue em todo subintervalo $[a, b]$ de $[a, +\infty[$ As funções φ^+ e φ^- definidas em $[a, +\infty[$ com valores em $\mathbf{R}$, dadas por

$$\varphi^+(b) = \int_a^b f^+(x)\, dx \qquad \text{e} \qquad \varphi^-(x) = \int_a^b f^-(x)\, dx,$$

são positivas e crescentes. Se os limites de ambas forem finitos define-se

$$\int_a^{+\infty} f^+(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \varphi^+(b) \quad \text{e} \quad \int_a^{+\infty} f^-(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \varphi^-(b),$$

dizendo-se que f possui integral imprópria segundo Lebesgue em $[a, +\infty[$ e

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f^+(x)\,dx - \int_a^{+\infty} f^-(x)\,dx.$$

Por conseguinte, quando existe a integral imprópria segundo Lebesgue de f em $[a, +\infty[$, resulta que também existe a integral imprópria do módulo ele f, isto é, $|f| = f^+ - f^{-1}$ dada por

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx = \int_0^{\infty} f^+(x)\,dx + \int_0^{\infty} f^-(x)\,dx$$

e reciprocamente.

Considere a função do exemplo anterior $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ se $0 < x < +\infty$ e $f(0)=1$.

Como visto possui integral imprópria segundo Cauchy-Riemann, §55, op. cit.. Por outro lado, foi visto em §93 op. cit. que seu módulo $|f|$ não possui integral imprópria segundo Lebesgue, logo f não possui integral imprópria segundo Lebesgue.

5. Certos Aspectos Históricos

Prefere-se fixar como início do estabelecimento do conceito de integral as investigações de Newton (1643-1727) e Leibniz (1646-1712). Estas concepções são sintetizadas nas duas seguintes linhas de pensamento.

• Idealizada por Newton corno integral indefinida, na nomenclatura atual, ou como função primitiva. Este denomina-se *método descritivo.*
• Concebido por Leibniz como integral definida, isto é, como a área. Será denominado *método construtivo.*

Segundo Newton uma função real de variável real f denomina-se uma integral indefinida ou primitiva quando possui derivada finita igual a g, isto é:

$$f' = g.$$

A função g denomina-se a integral de f em $[a, b]$ e $f(b)\ \ f(a)$ denomina-se a integral de Newton de f em $[a, b]$.

A teoria da integral desenvolveu-se, inicialmente, segundo as idéias de Newton como o inverso da derivada. Várias aplicações foram feitas a problemas de Mecânica e de Física, em geral.

As idéias de Leibniz permaneceram estáticas. Entretanto, Cauchy (1789-1857) retornou à concepção de Leibniz com o estudo da integral na classe das funções contínuas em um intervalo [*a, b*]. De posse da noção de limite definiu a noção de integral para uma função contínua em [*a, b*] representada por

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Posteriormcnte o conceito de integral de Cauchy foi estendido à classe das funções quase contínuas por Riemann e Darboux.

O passo decisivo na teoria da integral foi dado em 1901 por Lebesgue (1875-1941). A idéia genial de Lebesgue foi descrita na Introdução do presente artigo.

Vários são os processos de definir a integral de uma função. Para acompanhar sua evolução, vem organizado, a seguir, um quadro sinóptico contendo os métodos e os matemáticos envolvidos rio processo. O quadro foi organizado seguindo três linhas de idéias: Newton, *método descritivo;* Leibniz**,** *método construtivo;* Daniel, *método axiomático.* O quadro mostra a evolução no tempo. Note-se que há outros aspectos da evolução que não figuram neste quadro.

Agradecimentos

O autor agradece aos colegas Carla Lopes, Francisco Vieira, Mansa Ortegoza, professores do Instituto ele Matemática da UFF, pelas discussões construtivas que teve sobre vários pontos do presente texto.

Método Descritivo (Sem Medida)

NEWTON
(1643-1727)

Teorema Fundamental

PERRON - DENJOY - KHINTCHINE - RIESZ
(1914)
Super e Sub Funções (Perron)
Números Transfinitos (Denjoy - Khintchine)
DE LA VALLE POUSSIN
(Funções Majorantes)

Método Construtivo (Com Medida)

LEIBNIZ
(1646-1712)

CAUCHY (Funções
(1777-1855) Contínuas)

RIEMANN (Funções
(1826-1866) Limitadas)

DARBOUX (Integrais
Inferior e Superior)

LEBESGUE (Mensuráveis)
(1875-1941)

Outros: **Hanh; Lusin; N.H.Young; Riesz; Borel; Caracteodory**

KURZWEIL-HENSTOCK (1960)

MAC SHANE

STIELTJES (Cauchy-Riemann)

STIELTJES LEBESGUE
(Curso Lebesgue-Collège de France)
(1904)

Método Axiomático

DANIEL (1917)
HAAR

STONE

BOURBAKI (Medida de Radon)
Distribuição de L. Schwartz

L. A. Medeiros