Novembro / 07 **Ano XII - Nº 37**

Universidade Federal Fluminense

Jornal DÁ LICENÇA

EDITORIAL

David Hilbert nasceu em 23 de janeiro de 1862, e morreu em 14 de fevereiro de 1943. Foi um matemático alemão cujo trabalho em geometria teve a maior influência no campo desde Euclides. Depois de fazer um estudo sistemático dos axiomas da geometria Euclidiana, Hilbert propôs um conjunto de 21 axiomas e analisou o significado deles. Hilbert recebeu o seu Ph.D. da Universidade de Konigsberg e serviu em sua faculdade de 1886 a 1895. Ele se tornou (1895) professor de matemática na Universidade de Gottingen, onde ele permaneceu pelo resto de sua vida. Entre 1900 e 1914, muitos matemáticos dos Estados Unidos que depois representaram um papel importante no desenvolvimento da matemática foram para Gottingen para estudar com ele. Hilbert contribuiu a vários ramos da matemática, incluindo a teoria algébrica do número, análise funcional, físicas matemáticas, e os cálculos de variações. Ele também enumerou 23 problemas não solucionados de matemática que ele considerou merecedor de investigação adicional. Desde o tempo de Hilbert, foram resolvidos quase todos estes problemas.

Este Número ...

... conta com dicas de sites, livros, etc. que envolvem matemática. Na seção *Falando Sério* quem nos concedeu uma entrevista foi o Prof Leonardo Navarro de Carvalho (GMA). Em *Trocando em Miúdos* quem nos brinda é o Prof. Roosevelt(GGM). Em *Dá Licença para o "bom" Português,* contamos com a colaboração do Prof Paulo Trales (GAN). Em *Dicas de Veteranos*, contamos com a contribuição da aluna Talita Ribeiro. Em *Por onde andam os Ex-alunos*, quem nos conta o que anda fazendo é a Profª Andréa Thees. Não deixe de tentar resolver o desafio proposto pelo Prof José Roosevelt. Boa Leitura!

NOTÍCIAS DO PROGRAMA DÁ LICENÇA

A coordenação do Programa Dá Licença vem por meio desta nota comunicar que o Projeto *Caderno Dá Licença*, mudou de coordenação. Após alguns anos de muito empenho e dedicação, a Profª Renata Del-Vecchio (do GAN) passou a coordenação do projeto para o Prof José Roberto Linhares (do GGM). Obrigado Renata! Seja bem-vindo Prof Linhares! A equipe do programa gostaria de destacar ainda a bela iniciativa dos nossos alunos da matemática em organizar o II EREMAT-RIO (Encontro Regional dos Estudantes de Matemática do Rio de Janeiro). Parabéns *moçada*! Convocamos a participação de todos no evento!

NOTÍCIAS DO D.A.

Nos dias 9 e 10 de novembro deste ano ocorrerá o EREMAT/RIO – Encontro Regional de Educação Matemática. O evento será realizado principalmente no Instituto de Matemática. Contará com Palestras Minicursos e oficinas. Estão todos convidados para participar.

DICAS DA REDE

1) Matemática para Gregos & Troianos
http://www.gregosetroianos.mat.br/

2) Matemática do Ensino Médio
http://www.ensinomedio.impa.br/

Este site é voltado, primordialmente, aos professores do Ensino Básico e contém: informações sobre os Programas de Aperfeiçoamento de Professores desenvolvidos no IMPA, informações sobre os livros da Coleção do Professor de Matemática, publicados pela SBM, materiais on-line (livros, atividades interativas, links), espaço para que o professor possa tirar suas dúvidas.

3) Coleção "Tendências em Educação Matemática"

A Coleção "Tendências em Educação Matemática" dirige-se aos profissionais de Educação Matemática, bem como para os futuros professores dessa área, de modo reflexivo e partindo do princípio de que todos podem produzir matemática nas suas diferentes expressões. De fato, ao fazer isso, a coleção também contribui para o aumento no escasso número de obras em língua portuguesa sobre a educação continuada de professores.
http://www.rc.unesp.br/igce/pgem/home/livros/colecao.html

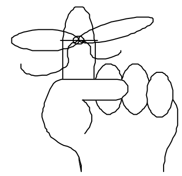
DICAS DE LIVROS

1) CARTAS A UMA JOVEM MATEMÁTICA
Autor: Ian Stewart. Editora: Relógio d'água.
ISBN 972-708-927-6

Cartas a Uma Jovem Matemática conta aos leitores o que Ian Stewart desejava ter sabido quando era estudante. Levanta questões desde o filosófico ao prático – o que é a matemática e porque vale a pena praticá-la, a relação entre lógica e prova, o papel da beleza no pensamento matemático, o futuro da matemática, como lidar com a comunidade dos matemáticos, e muitas outras – num estilo que combina sutileza, humor e um talento especial para ir direito ao assunto. Ian Stewart é professor de Matemática na Universidade de Warwick e diretor do Mathematics Awareness Centre. Escreveu mais de 140 ensaios de investigação sobre assuntos tão diferentes como simetria na dinâmica, formação de padrões, caos, biologia e matemática, e também vários livros, onde se incluem *Deus Joga aos Dados?*, *What Shape Is a Snow flake?*, *Nature's Numbers*, *The Annotated Flatland* e *Flatterland*. Foi eleito membro da Royal Society em 2001. Vive em Coventry, Inglaterra.

2) OS NÚMEROS DA NATUREZA – Mestres da Ciência
Autor: Ian Stewart Tradução: Alexandre Tort
ISBN:85-325-0665-8

A matemática é o sistema formal de pensamento desenvolvido pela mente e a cultura humana para reconhecer, classificar e explorar padrões. Ao usar a matemática para organizar e sistematizar nossas idéias a respeito de padrões, descobrimos um grande segredo: os padrões da natureza não existem apenas para serem admirados, mas são pistas que governam os processos naturais. Para Ian Stewart, autor dessa concisa introdução ao mundo da matemática, o desenvolvimento de novas teorias nos fornece uma visão mais profunda do mundo em que vivemos – e de nosso lugar nele. O movimento das estrelas é uma pista de que a Terra gira. Ondas e dunas são pistas para as regras que governam o fluxo da água, da areia e do ar. As listras dos tigres e as manchas das hienas mostram as regularidades matemáticas na forma e no crescimento biológico. Os arco-íris nos informam a respeito do espalhamento da luz e indiretamente confirmam que as gotas de chuva são esferas. A compreensão recente das regularidades secretas da natureza está sendo utilizada para orientar satélites artificiais com menor gasto de combustível, para aperfeiçoar os marcapassos cardíacos, para controlar florestas e criações de peixes e mesmo para fabricar máquinas de lavar pratos mais eficientes. Em linguagem acessível, Ian Stewart nos convence, em Os números da natureza, de que a matemática é a ferramenta privilegiada de que dispomos para entender o mundo ao nosso redor.



DIVULGAÇÃO DE EVENTOS

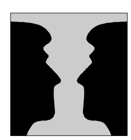
*** V CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**
Ouro Preto, Dias 8, 9 e 10 de Novembro de 2007 – Ouro Preto – MG

EVENTOS DÁ LICENÇA

Coordenadora: Prof[a] Solimá Pimentel (GAN)

1) Práticas Pedagógicas Inclusivas: Reflexões Propositivas
Expositora: Cristina Maria Delou - FE da UFF no dia 01/11/07 às 14h na sala do Dá Licença.

2) Apresentando Curiosidades Topológicas nos Ensinos Fundamental e Médio
Expositor: Paulo Trales - IM da UFF (ainda não tem data marcada, mas será no final de novembro)



FALANDO SÉRIO

O Prof Leonardo Navarro de Carvalho é professor efetivo do GMA/UFF – Departamento de Matemática Aplicada – UFF e nos concedeu uma entrevista para o Dá Licença / DACEM em outubro de 2006.

Nascido na cidade do Rio de Janeiro em 07/07/1972 é filho do Prof Pitombeira de Carvalho, um dos mais significativos nomes da matemática brasileira, e de Maria Ivânia.

Dá Licença: *Quando começou a surgir o gosto pela matemática?*

Leonardo: Surgiu cedo, mas não era claro que iria estudar matemática. Leonardo afirma também que seus pais sempre deixaram os filhos livres para escolher o caminho profissional, porém, destacando a importância de uma carreira acadêmica.

Dá Licença: *Quando adolescente, de que mais gostava além de matemática?*

Leonardo: Gostava de música e de ler. Tinha interesse em ler alguns dos autores modernos da filosofia francesa como Jean Paul Sartre e confesso ser admirador de Benny Goodman, clarinetista de Jazz. Cheguei a estudar clarinete, mas hoje apenas se descontrai com seu violão.

Dá Licença: *Onde fez sua graduação?*

Leonardo: Na PUC-Rio. Escolhi matemática pelo prazer que sentia a esta altura de minha vida com a disciplina. Sem influência direta de seu pai. Cheguei a integrar o diretório central dos Estudantes da PUC e o Diretório Acadêmico de Matemática. Destaco a importância e influência do Prof Nicolau Saldanha em minha formação e fiz um curso de Álgebra Linear com meu pai, professor da PUC-Rio. Acho que ele foi excessivamente rigoroso comigo, mais até do que com o resto da turma (comenta de forma bem humorada).

Dá Licença: *Qual sua área de pesquisa?*

Leonardo: Topologia, topologia geométrica, mas tenho interesse em outras áreas. Fiz mestrado também na PUC-Rio. Logo após a sua conclusão, ingressei no doutorado também na PUC-Rio, mas dei continuidade nos Estados Unidos - Nova Jérsei, na Universidade de Rutgers. Curiosamente, defendi duas teses diferentes de doutorado, uma pela PUC-Rio outra pela universidade americana, por estar ligado a dois programas de doutorado. Enquanto residi nos EUA, trabalhava em monitorias (“TA-ship”) para me sustentar e que os maiores problemas eram a saudade do Brasil, e o frio. Ao retornar ao Brasil, ingressei no Pós-doutorado da UNICAMP.

Dá Licença: *O que dizer para quem está fazendo o nosso curso de matemática?*

Leonardo: Matemática é uma carreira com peculiaridades. É muito exigente, é preciso se esforçar, mas é possível ser um bom matemático sem ser gênio. Vale a pena.

Dá Licença: *Nos fale sobre o que é mais importante em matemática e no trabalho em matemática.*

Leonardo: Uma das coisas poderosas em matemática é quando você consegue ver seus objetos de estudo por diferentes pontos de vista, mudando seus referenciais para compreendê-los melhor (os objetos). O simples fato de observar um gráfico de uma função pode nos trazer informações que apenas uma expressão algébrica que a define dificilmente nos diria. Ou mesmo o inverso, o gráfico pode não nos fornecer tudo que precisamos para entender um problema, o que a expressão algébrica pode fazer. Como outro exemplo, em Geometria plana, ao acrescentar um sistema de coordenadas, passando do euclidiano ao analítico, ainda falando dos mesmos objetos,você pode ver propriedades obscuras anteriormente. E ainda mais se introduzirmos a estruturados complexos (no plano). Em um certo sentido, boa parte do trabalho do matemático é achar diferentes maneiras de ver e analisar os problemas. Isso ocorre, mais uma vez, como outro exemplo, em topologia algébrica: a introdução de estruturas algébricas em espaços de objetos fundamentalmente topológicos nos dá ferramentas para resolver problemas de natureza topológica com mais facilidade. É claro que essas ferramentas vêm sendo desenvolvidas ao longo da história, e é indispensável que as estudemos para podermos utilizá-las.

POR ONDE ANDAM OS EX-ALUNOS ...

Quem nos conta o que anda fazendo ao longo dos anos é Andréa Thees.

Três anos atrás, era impossível imaginar que voltaria a frequentar aulas na UFF Vocês entenderão porque...

Fiz graduação em Matemática numa época em que esta era a única opção para quem queria cursar Informática. Como nunca foi minha intenção trabalhar no meio acadêmico, estagiei os dois últimos anos da graduação na área de estatística e marketing de uma multinacional, certa que esta experiência me livraria de vez da área educacional. Durante minha infância e adolescência sempre escutei minha mãe, professora primária, reclamando de ter escolhido essa profissão. Hoje eu entendo porque ela só conseguiu parar depois de 45 anos lecionando...

Voltando aos fatos, 20 dias após minha formatura, em 1988, eu já estava começando no primeiro emprego, como Assistente de Marketing de uma empresa de desenvolvimento de software. Nos anos 90 e poucos, um novo emprego, agora na área de microinformática de uma grande empresa. É de conhecimento geral que toda grande empresa busca o desenvolvimento individual e a competição entre seus funcionários. Por isso, inventaram um concurso interno para selecionar os mais “capacitados”. Depois de uma quase lavagem cerebral, consegui uma vaga e lá fui eu fazer uma pós-graduação em Gestão de Negócios no IAG – PUC. E, como nada é de graça nesta vida, fui “promovida” para um cargo de maior responsabilidade (e maior “ralação”). Afinal, com essa qualificação e esse investimento todo nada mais normal que ser mais explorada também. E, chega um dia, em que a empresa se cansa de você e ops.... Fiquei desempregada.

Sem muita opção, começou o período que chamo de “jogando nas onze”. Era um tal de produzir figurino e cenário para comerciais, produzir o próprio comercial, ser assistente de produção de shows, administrar peças de teatro, preparar projeto cultural, correr atrás de patrocínio, Lei Rouanet pra cá, Ministério da Cultura pra lá, coordenar eventos, organizar seminários, feiras,encontros. Ufa! Cheguei a me interessar pela, na época novíssima, área de Gerenciamento de Projetos. Um interesse que me rendeu um emprego de Coordenadora de Produto em uma ONG. Empreguinho legal, mas que durou apenas um ano e, de novo sem emprego! Desta vez, a situação ficou complicada. Foram 4 meses procurando uma recolocação, e nada. Até que um dia eu lembrei daquele diploma guardado há quase 20 anos – Licenciatura em Matemática, e pensei: Por que não?

Vocês acharam que no dia seguinte eu já estava dando aula, né? Claro que não.

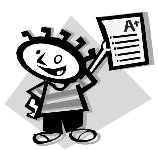
Ofereci-me para fazer qualquer coisa em dois colégios nos quais eu tinha contato pessoal com as coordenadoras. Qualquer coisa mesmo: tomar conta de turma quando faltava professor, dar aulas de apoio sem remuneração, digitar notas em boletim, fazer cartazes, organizar a biblioteca.... Até que alguns meses depois, veio o reconhecimento: fui convidada para substituir a professora de informática. Por coincidência, o outro colégio também me ofereceu a mesma vaga.... Concentrei todo meu esforço, imaginação e criatividade nas aulas.

Também aproveitei para voltar a estudar e, na Especialização em Matemática da UFF, pude aprofundar os conteúdos, ficar por dentro das novidades sobre o ensino, conhecer e entender mais sobre Educação Matemática.

Deu tudo tão certo que, no ano seguinte, além da informática, eu já tinha turmas de matemática. E, semana passada, fui convidada para lecionar Metodologia do Ensino de Matemática em uma Faculdade de Pedagogia.

Após todos estes anos, mudando de emprego aqui e ali, tenho plena consciência de que nada é mais gratificante do que lecionar. Eu finalmente “me achei” nesta profissão, onde nem tudo dá certo o tempo todo, mas não sei bem explicar o porquê, existe uma mágica, uma cumplicidade na sala de aula que apenas quem nasceu pra isso sabe o que significa.

Andréa Thees



DICAS DE VETERANOS

Quem nos brinda com suas sugestões é a aluna Talita Ribeiro.

Sou Talita Ribeiro, estou no 7° período. Ao começar o curso minha intenção era fazer apenas o bacharelado, era fascinada (e ainda sou) pelas palavras: Pesquisa e Ciência.

Mas ao longo do curso decidi fazer também a licenciatura. Foi então que tive uma surpresa: dar aula é maravilhoso e educação pode ser tão interessante quanto pesquisa. Pois apesar dos problemas da educação no Brasil, é gratificante entrar em uma sala de aula cheia de alunos sedentos por conhecimento. Minha primeira dica é: sejam como estes alunos, estudem após cada aula e procurem os monitores regularmente, o resultado compensa. Não deixem para estudar na véspera da prova, pois nosso objetivo não deve ser a aprovação, mas sim o conhecimento, e é necessário tempo para amadurecer as idéias matemáticas. Além disso aproveitem ao máximo todos os recursos oferecidos pela universidade, não só os oferecidos pela matemática, mas os recursos da UFF em geral, como por exemplo, a Casa da Descoberta do Instituto de Física e as disciplinas eletivas oferecidas por outros cursos, o ambiente acadêmico é extremamente enriquecedor. Uma das nossas grandes vantagens é o ótimo relacionamento entre professores e alunos. Nossos professores, além de grande bagagem matemática, nos oferecem apoio, auxílio, conselhos em relação às disciplinas e ao curso em geral, enfim estão sempre dispostos a ajudar. Aproveitem as palestras que são oferecidas pelo nosso curso, estejam presentes em quantos congressos conseguirem, enquanto graduandos e posteriormente, como professores ou pesquisadores, pois devemos adquirir o máximo de conhecimento possível a fim de nos tornarmos excelentes profissionais. Por último,mas não menos importante, sempre que possível, leiam livros de literatura matemática,pois a matemática não é apenas lógica, mas é também, uma profunda e sensível reflexão da vida.

DESAFIOS

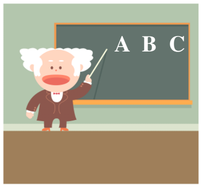
Suponha trinta vetores não nulos no espaço. Prove que pelo menos dois dentre eles fazem entre si um ângulo estritamente menor que 45 graus.

DICAS DE PROGRAMAS DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

A dica desta vez é para dois programas: *Octave* e o *Freemat*

1) Octave: É um programa usado para cálculos numéricos, especialmente os que envolvem matrizes ou uma grande quantidade de dados. Ele é em grande parte compatível com o software comercial Matlab. O Octave é disponível para Windows e Linux. Para instalar no Windows, baixe o arquivo octave - X.Y.X - inst.exe (onde X.Y.Z é a versão) erode o instalador. A homepage do programa é: http://www.gnu.org/software/octave/.

2) Freemat: O FreeMat é um software maduro que vem numa ascensão de atualizações, como o Octave também é OpenSource, e roda tanto em Mac, como em Linux e Windows. É um ambiente de desenvolvimento livre para computação numérica voltado para calculo numérico. Suporte para várias funções do Matlab e algumas funcionalidades IDL, suporta código de programação C, C++ e Fortran e ainda desenvolvimento de algoritmos distribuídos paralelamente via MPI. O programa conta ainda com alguns volumes extendidos, visualização 3D, manipulação de imagem, plotagem e criação de gráficos. Também tenta manter compatibilidade de sintaxe com o Matlab e na sua nova versão tem muitas implementações feitas. http://freemat.sourceforge.net/wiki/index.php/Main_Page



DÁ LICENÇA PARA O "BOM" PORTUGUÊS

Prof Paulo Trales (GAN)

REVENDO A ORTOGRAFIA

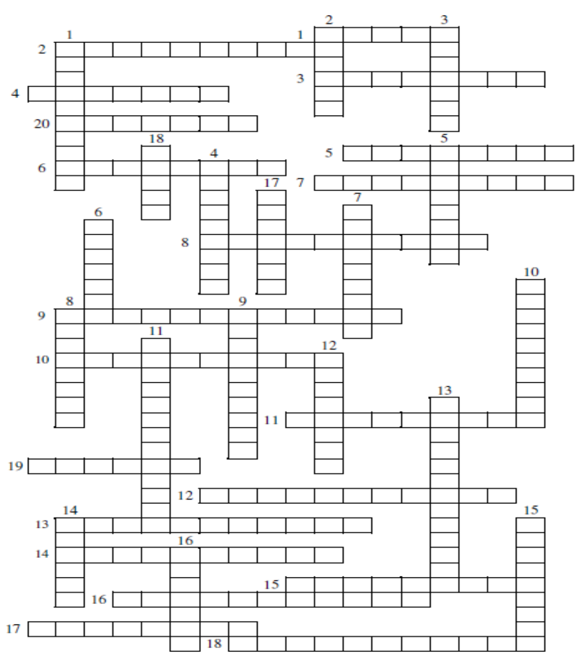
As palavras cruzadas podem ser utilizadas como um instrumento para auxiliar a escrever. Vejamos como anda nossa ortografia em palavras muitas vezes utilizadas no universo do professor de matemática. Lembre-se que o professor é um formador - até de opinião - e nessa profissão escrever corretamente é mais que um dever, é uma obrigação.

NA VERTICAL

1. IMPO___ÍVEL
2. FLE___A
3. E__CE__ÃO
4. SUPO__I___ÃO
5. E___CLU___ÃO
6. A NÁLI__E
7. DISCU___ÃO
8. DIMEN__ÃO
9. TRAN___PO___TA
10. E___PRE___ÕES
11. E___ALONAMENTO
12. AB___I____A
13. INCON___ISTENTE
14. ELIP___E
15. CONVER___ÃO
16. INVER___A
17. SÍNTE___E
18. FEC___O

NA HORIZONTAL

1. FEI___E
2. INVER__ÍVEL
3. CORRE___ÃO
4. LO___ANGO
5. ESPE___IAL
6. EX__E___ÃO
7. A ____O____IADO
8. INTER____E____ÃO
9. DEMOSTRA___ÃO
10. E__ISTÊN__IA
11. DI__JUNTOS
12. A____INTÓTICA
13. E___PONE___IAL
14. INCLINA___ÃO
15. ___O___IENTE
16. COEFI___IENTE
17. MANTI____A
18. COMPREEN___ÃO
19. A ___IOMA
20. SOLU___ÃO



TROCANDO EM MIUDOS ...

Primeiros aspectos dos Fundamentos de Geometria de Hilbert.

Parte I

Nota: Este texto é o primeiro de uma série de três artigos.

§1. Introdução. Após inúmeras tentativas frustradas para demonstrar o postulado das paralelas, durante o longo período de mais de dois mil anos, chegou-se ao término da questão de um modo um tanto revolucionário como, de certa forma frustrante: percebeu-se a existência de outras teorias para a geometria do espaço e ao mesmo tempo foi mostrada a impossibilidade de se demonstrar o quinto postulado. Em 1850, o matemático Hilbert publicou o que seria a versão da época dos *Fundamentos de Euclides*. Para homenagear o matemático grego, manteve cinco itens na axiomática; mas desta vez cada item era um grupo de axiomas de mesma espécie: Incidência, Ordem, Congruência,Continuidade e o grupo cinco relativo ao Paralelismo. A geometria estava agora bem fundamentada. Uma geometria que satisfaz aos quatro primeiros grupos de axiomas é denominada *Geometria Absoluta (ou geometria neutra).* Esta parte axiomática é comum as Geometria Euclidiana e Hiperbólica. O natural avanço da Matemática na sua Fundamentação e no trato de seus problemas internos, resultou em varias criticas à axiomática Euclidiana. Ela é insuficiente para responder a inúmeras questões da geometria, notadamente as de continuidade e separação. Esta era uma situação que dificultava bastante a tentativa de demonstração do quinto postulado. O leitor pode constatar que as sentenças abaixo não são demonstráveis com os axiomas originais de Euclides. A lista dos Postulados de Euclides está descrita mais adiante neste texto:

(Q1) Entre dois pontos de uma reta existe pelo menos um ponto.

(Q2) A bissetriz de um vértice de um triângulo intercepta o lado oposto.

(Q3) Uma reta não pode estar inteiramente contida em um triângulo ou em um círculo.

(Q4) Se uma reta intercepta um ponto interior a um círculo, então esta reta possui dois pontos comuns com este círculo.

Possivelmente, a introdução do método axiomático na geometria teria como objetivo manter a geometria livre de uma crise como a que ocorreu na *cosmologia e filosofia Pitagórica* calcada na aritmética, onde tudo no universo seria explicado como uma razão. De fato, a descoberta do irracional $\sqrt{2}$, na linguagem de medidas não comensuráveis, provocou uma derrocada nos princípios pitagóricos, mas na geometria seu significado era o de construir a diagonal de um quadrado de lado unitário, o que nunca foi inviabilizado.

Como surgiu a nova postura, a de demonstrar o que o experimento confirmava?

Conhecemos pouco sobre a transformação da Matemática Prática e Empírica para a Matemática Axiomática. A maioria dos autores considera que as atividades em Matemática anteriores aos gregos eram de caráter essencialmente prático. Por exemplo, encontramos nas tábuas de argila da Mesopotâmia, várias tabelas de operações entre números. Além disso, o Egito nos legou tabelas de recíprocos e as denominadas frações egípcias. Num estudo comparativo destas civilizações (o Oriente Próximo e a Grécia), constatamos que grandes obras de engenharia foram efetuadas pelos egípcios, donde se destacam as construções de pirâmides.

Voltando ao tema, os textos orientais sobre Matemática relativos àquela época não continham referências aos termos teoremas, *demonstração*, *dedução* e *definição*.

Estes conceitos fundamentais apareceram pela primeira vez somente com os matemáticos gregos.

Em [Kneale, 1962] pg. 7, Kneale reconhece que o processo de demonstração foi assimilado paulatinamente pelos gregos. Em particular, há registros de demonstrações primitivas nas obras de Platão e Aristóteles. E em Aristóteles encontramos a consciência que seus silogismos abrangiam a dialética.(ver [Kneale 1962] pg. 9):

(A) *Porque os gregos eram insatisfeitos com o conhecimento matemático empírico?*

(B) *Porque substituir o que na prática se constatava ser correto?*

Devemos investigar o porque da mudança do *critério da verdade* da prática para concepções teóricas. A passagem para o método axiomático se deu no momento em que o conhecimento empírico foi questionado. No enfoque de Szabó [Szabó 1967] encontramos três considerações, listadas a seguir:

(i) *Os Elementos* estão organizados de modo semelhante ao procedimento dialético, de se prescrever de antemão certos princípios que nortearão as discussões futuras. Sabemos que Euclides enunciou *definições*, *postulados* e *axiomas*.

(ii) O mais interessante método de demonstração da Matemática grega é o método da *prova indireta* que deriva da dialética eleática. De fato, na argumentação indireta não demonstramos a afirmação diretamente, mas *refutamos* a afirmação oposta. Refutamos, portanto, uma afirmação, mostrando que ela leva a uma contradição. Encontramos como exemplo desta prova, a demonstração que a diagonal e o lado de um quadrado têm medida *incomensurável entre si*.

(iii) Um dos axiomas de Euclides, anunciado como um dos ‘princípios’ teve como objetivo responder a um dos paradoxos de Zenon: *o todo é maior que a parte*. Posteriormente o próprio Zenon explicou que seu argumento era sobre porções infinitas e que o termo correto era *a metade do tempo equivale ao seu dobro.*

Naturalmente, a cultura continha a prática da dialética, mas algum outro movimento em direção à justificação pode ter tido origem em questões internas da própria Matemática, através de matemáticos como Tales. Este conhecia que o ângulo inscrito num semicírculo é reto. O fato só pode ser utilizado após uma demonstração (Bernays). No entanto, podemos levantar outro objetivo para a utilização da dialética na mudança da Matemática empírica para a dedutiva: a crise grega sobre os irracionais inviabilizou a aritmética como cosmologia, e a nova questão era tornar a geometria a *nova cosmologia*. Note que o quadrado e sua diagonal sempre puderam ser construídos, o que torna a geometria isenta de contradições. Esta é a tese de Popper no debate com Szabó no sentido de apresentar o motivo de se axiomatizar a geometria.

Proclus deixa claro que as suposições não provadas em Matemática são as *definições*, os postulados e os *axiomas*. Sendo assim, assumia-se que a Matemática era de natureza *hipotética*. A homogeneidade do espaço é traduzida como uma curvatura constante. Sobre uma tal superfície, podemos efetuar movimentos ‘rígidos’ sem que haja bicos ou rasgaduras. Para ver isto, imagine uma esfera vestida com uma capa. Podemos rodar esta capa em torno da esfera sem que ela (a capa) altere sua forma. Ela se mantém ‘tangente’ à esfera. Da mesma forma, um pano sobre uma superfície plana pode ser puxado sem que ele forme dobras ou seja rasgado. No entanto,não se pode girar a embalagem de um ovo de páscoa da base para o bico sem rasgá-la.

A Geometria Euclidiana lida com um tal espaço homogêneo, e assim, admite movimentos rígidos como a translação e a rotação. Segundo Cayley, as propriedades qualitativas do espaço precedem as quantitativas. Com isto em mente podemos afirmar que a geometria projetiva é o principio de tudo; ou seja, as geometrias Euclidiana, Hiperbólica e Elíptica são decorrentes da geometria projetiva. Devemos esclarecer esse ponto em texto posterior.

§1 O postulado V e o triângulo. A Geometria Absoluta.

Para tratarmos deste tópico devemos levar em conta que a axiomática da Geometria Euclidiana sem o Postulado V, constitui uma geometria, que foi estudada por Bolyai e denominada Geometria Absoluta do Espaço. Nela, Janos Bolyai demonstra propriedades do espaço que não utilizam o postulado das paralelas. Naturalmente, um dos temas de discussão gira em torno do Postulado V. Abaixo estão os postulados de Euclides.

(I) Traçar uma reta de um ponto para qualquer ponto

(II) Estender indefinidamente um segmento de reta

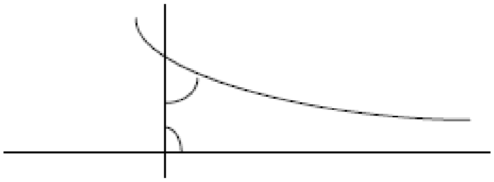
(III) Podemos traçar um círculo dado um centro e uma distância para raio

(IV) Dois ângulos retos são congruentes

(V) Se uma transversal corta duas retas formando ângulos colaterais internos que somam menos que dois retos, as retas se interceptam no lado onde isto ocorre.

Tenho convicção que o quinto postulado de Euclides busca caracterizar quando três retas formam um triângulo, ou seja, em que condições uma reta que intercepta duas outras, satisfaz a condição necessária e suficiente para a formação de um triângulo (euclidiano). De fato, o quinto postulado tem um aspecto de Teorema. Porém, ao que tudo indica, Euclides não pensava em fundamentar o estudo de retas assintóticas. Não há discussão sobre curvas que sejam assintóticas. Mas a situação da hipérbole já era conhecida dos gregos. Abaixo está uma citação de Proclus ([Artmann 2001]).

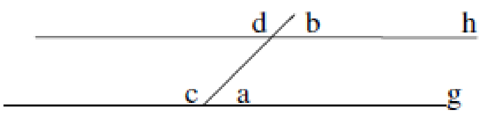
Que existam linhas que se aproximem uma da outra indefinidamente, mas nunca se encontrem parece implausível e paradoxal, embora isto ocorre para outras linhas como a hipérbole e suas assíntotas.



Outro modo de dizer o quinto postulado é: Se uma reta corta outras duas formando ângulos colaterais internos que somam menos de dois retos, então as três retas formam um triângulo do lado onde a soma é menor. Um dos primeiros a tentar provar o Postulado V foi Ptolomeu. O plano foi montado da seguinte forma: Euclides usou pela primeira vez o Postulado V para demonstrar a proposição 29 dos Elementos; logo, o caminho seria efetuar o inverso.

Proposição 29: *Uma linha reta interceptando retas paralelas determina ângulos alternos iguais, o ângulo exterior igual ao interior e oposto e os ângulos interiores do mesmo lado igual a dois retos.*

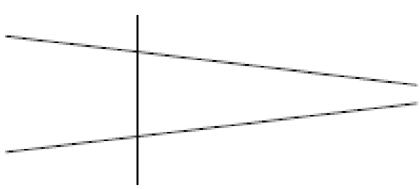
Para a execução deveria (1) provar esta proposição sem o uso do Postulado V e (2), deduzir o postulado da Proposição (29).



O passo (1) foi desenvolvido abaixo: Suponha que uma transversal cortando paralelas h e g, forma ângulos a, b, c e d como acima. Suponha que a + b < dois retos. Desde que g e h são paralelas tanto de um lado da transversal como do outro, a soma dos ângulos interiores sobre um lado é a mesma que do outro. Então: c + d < dois retos. Destas desigualdades temos a + b + c + d < quatro retos, o que contraria a proposição 13 que segue abaixo:

Uma reta corta outra segundo dois ângulos retos ou dois ângulos que somam dois retos.

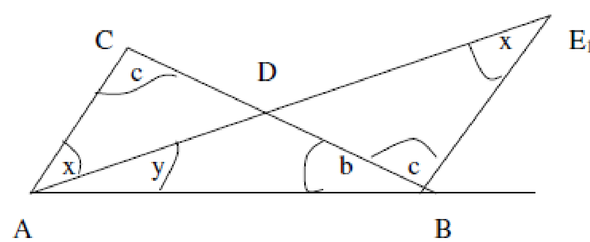
Veremos mais adiante, ao tratarmos da Geometria Hiperbólica, a existência de uma secante denominada secante de igual pendente. Na figura, a reta transversal forma ângulos congruentes (agudos) com as duas retas paralelas. Outra possibilidade na geometria hiperbólica é de existir apenas uma perpendicular entre duas paralelas.



Houve um longo intervalo até os estudos do italiano Girolamo Saccheri (1667-1733),intervalo, este permeado por estudos de matemáticos árabes e posteriormente na Renascença (ingleses, franceses e italianos). O que o destaca (Saccheri) foi o fato de observar pela primeira vez, negar o Postulado V. Para isto, elaborou um quadrilátero, hoje conhecido como Quadrilátero de Saccheri. A publicação do trabalho de Saccheri em 1733 chamou a atenção de vários matemáticos. Na verdade, Saccheri considerava absurdo certos resultados decorrentes de axiomas não euclidianos como 'duas retas paralelas podem ser assintóticas', 'é possível traçar infinitas paralelas a uma reta por um ponto que não lhe pertence'. Em particular, encontramos uma análise deste texto e de 'demonstrações do Postulado V' já componentes da história da questão do postulado, através da tese do alemão G. Klügel em 1763. Mas no nosso breve relato,passamos ao trabalho do matemático suíço J. Lambert (1728-1777). Nossa estratégia aqui é a de apresentar um primeiro resultado, fruto da tentativa de demonstrar o quinto postulado, com conseqüências profundas, que diferencia a Geometria Absoluta da geometria de uma esfera e que propicia a definição de área hiperbólica. Note que Gauss efetuou um experimento com jogos de espelhos colocados em três montes distintos, para determinar a soma dos ângulos internos de um triângulo; verificou que valia dois retos. Para seus estudos, utilizou um novo quadrilátero, desta vez com três ângulos retos, tendo mostrado que a área de *um triângulo é proporcional a S – (a + b + c),* onde a, b, c representam as medidas dos ângulos internos de um triângulo, ou, em termos mais atuais, na Geometria Hiperbólica, a área de um triângulo é proporcional ao seu defeito (a expressão acima). Uma importante contribuição foi a demonstração por Lambert do seguinte:

Teorema *(primeiro teorema de Legendre) Na geometria absoluta a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor ou igual a π radianos.*

Demonstração: Faremos a prova por absurdo. Suponha que um triângulo ABC contradiz o teorema, assim que a soma de seus ângulos internos é p+d = a + b + c = (x + y) + b + c, onde d é um valor real positivo. Suponha que o ângulo a é o menor ângulo interno do triângulo ABC. Na figura abaixo seja D o ponto médio de BC e DE_1 // AD.

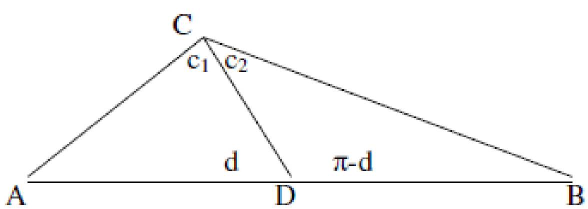


Os triângulos DADC e DE_1DB são congruentes. Portanto, $\angle ACD$ _ $\angle DBE_1$ e o ângulo ABE_1 mede b + c. Assim, o triângulo ΔABE_1 tem a mesma soma de ângulos (internos) $\pi + \delta$ Temos $x \leq a/2$ ou $y \leq a/2$. Digamos que x satisfaz tal condição. Senão for o caso, consideramos os triângulos congruentes ΔADB e ΔE_1DC o que nos dá $\angle ACE_1$ = b + c no ΔACE_1. Ponhamos x_1= x e consideremos agora o triangulo ΔABE_1. Suponhamos agora que ocorre na medida x do vértice E_1 um fato análogo ao do vértice A quando das nossas construções. Consideremos que x se subdivide em medidas x_1 e y_1 e que se tenha $x_1 \leq x/2$. Após n + 1 etapas, obtemos um ângulo x_n onde $x_n \leq a/2^{n+1} < \delta$. Esta desigualdade nos leva a uma contradição, pois neste 'n-ésimo triângulo' de ângulos digamos u, v, x_n deveríamos ter mantido u + v +

$x_n = \pi + \delta$ o que implica $u + v \geq \pi$ contrariando o *Teorema do Ângulo Externo*. O defeito de um triângulo ABC é dado por δ (ABC) = π - S(ABC) onde S(ABC) representa a soma dos ângulos internos do triângulo ABC. Este teorema é válido na geometria hiperbólica e na euclidiana. Na geometria hiperbólica o defeito é positivo, o que significa que a soma dos ângulos internos de um triangulo é menor que dois retos. Este fato é usado para definir área hiperbólica.

Proposição: Dado um ponto D de AB em um triângulo ABC então δ(ACD) + δ(CDB) = δ(ABC).

Demonstração Decompormos o triângulo ABC em dois triângulos ΔACD e ΔCDB como na figura. Somando-se os defeitos obtemos o que buscamos.



Afirmação: Se, num modelo de Geometria Absoluta, existe um triângulo cuja soma dos ângulos internos é π, então todo triângulo tem esta propriedade e a geometria correspondente é a euclidiana. Para tratarmos a questão acima podemos notar que uma altura de um triângulo o divide em dois triângulos retângulos. Assim, basta demonstrarmos a afirmação para triângulos retângulos. Note ainda que se um triângulo tem defeito zero, também o terão quaisquer triângulos que o subdividem, desde que seja em número finito. O defeito δ(ABC) de um triângulo hiperbólico satisfaz certas condições apropriadas como a aditividade, podemos definir a área de um triângulo ABC como a medida δ(ABC) do seu defeito. Isto diferencia as geometrias euclidiana e hiperbólica, mas mostra que em pequenas medidas, as duas são similares pois o defeito é δ(ABC) quase zero. Na Geometria euclidiana, para cada real positivo α existe um triângulo cuja área é maior que α. O uso da semelhança de triângulos mostra esta possibilidade. Mas não existe semelhança na geometria hiperbólica pois se dois triângulos tem ângulos internos correspondentes de mesma medida eles são congruentes. Cada um destes dois aspectos é equivalente ao quinto postulado de Euclides.

Referências:

[Szabó1967] - Szabó, *Problems in the Philosophy of Mathematics, Greek Dialectic and Euclide's Axiomatics*, (Editado por Lakatos), North-Holland 1967

[Kneale 1962] - Kneale, W., Kneale, M., *O Desenvolvimento da Lógica Vol 1*, FundaçãoCalouste Gulbenkian, 3ª edição.

[Artmann 2001] - Artmann, B., Euclid – *The Creation of Mathematics*, Springer, 2001.

CURIOSIDADES E DESAFIOS

Brincando com a Torre de Hanói

No endereço:
http://www.prof2000.pt/users/pjca/Jogos_ficheiros/hanoi/Torre%20de%20Hanoi.html

A Torre de Hanoi é um quebra-cabeça que consiste em uma base contendo três pinos, onde em um deles, são dispostos sete discos uns sobre os outros, em ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo. O problema consiste em passar todos os discos de um pino para outro qualquer, usando um dos pinos como auxiliar, de maneira que um disco maior nunca fique em cima de outro menor em nenhuma situação. O número de discos pode variar sendo que o mais simples contém apenas três.

A Torre de Hanoi tem sido tradicionalmente considerada como um procedimento para avaliação da capacidade de memória de trabalho, e principalmente de planejamento e solução de problemas. É interessante observar que o número mínimo de "movimentos" para conseguir transferir todos os discos da primeira estaca à terceira é 2n-1, sendo n o número de discos. Logo: para solucionar um Hanói de 3 discos, são necessários 2^3 -1 movimentos = 7 movimentos, para solucionar um Hanói de 7 discos,são necessários 127 movimentos

"Não é paradoxo dizer que em nossos momentos mais teóricos podemos estar mais próximos de nossas aplicações mais práticas."

A.N. Whitehead

EQUIPE DO JORNAL DÁ LICENÇA
jornal.dalicenciatura@ gmail.com
Coordenadora: Profª Márcia Martins (GAN)
Vice-coordenadora: Profª Valéria Zuma Medeiros (GMA)
Docentes Participantes: Profª Anna Beatriz A. Santos (GAN) + Prof José Roosevelt Dias (GGM) + Prof Paulo Trales (GAN) + Prof Wanderley M. Rezende (GMA)