COMO O MATLAB TRATA SISTEMAS LINEARES

Hamilton Leckar
Doutorado em Matemática - UNICAMP
Professor Adjunto - GMA/UFF
E-mail: GMAHAFL@VM.UFF.BR

Rubens Sampaio
Doutorado em Matemática - Cannegie - Mellon University - USA
Professor Titular GMA/UFF (Aposentado)
E-mail: rsampaio@mec.puc-rio.br

COMO O MATLAB TRATA SISTEMAS LINEARES

1 *Introdução*

Estas notas estão divididas em duas partes principais. Na primeira parte, calculamos com o MATLAB uma *aproximação* da solução de um sistema linear AX =b, através de alguns exemplos nos três casos seguintes:

- O sistema tem uma única solução.
- O sistema tem uma infinidade de soluções.
- O sistema não tem solução.

Em cada caso, comparamos a resposta dada usualmente pelo MATLAB com a resposta obtida por um outro programa **solsis**[1] que procura simular uma possível resolução à mão.

Na segunda parte, associamos a qualquer sistema linear, um novo problema (na verdade, uma extensão não linear), que tem uma única solução. Trata-se do seguinte problema de otimização:

PROBLEMA: Achar um vetor coluna X de coordenadas $x_1,\ldots,x_n$ com norma[2] mínima, tal que $b_1^*,\ldots,b_m^*$ onde

$b_1^* = a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n,\ldots,b_m^* = a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n$
compõem o vetor coluna b^* mais proximo[3] de b ."

Em seguida, usando o MATLAB, aproximamos a solução desse novo problema, a partir da *peudo-inversa da matriz do sistema correspondente.*

2 *Sistemas Lineares*

Iniciaremos com um sistema linear geral

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1+\ldots+a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

de m equações nas n incógnitas $x_1,\ldots,x_n$.

Classicamente o problema importante que se coloca para esse sistema é o seguinte:

"Dadas as constantes $a_{11},\ldots,a_{1n},a_{21},\ldots,a_{2n},\ldots,a_{mn}$ e as constantes $b_1,\ldots,b_m$, achar números $x_1,\ldots,x_n$ para os quais todas as equações em (1) são simultaneamente verdadeiras."

Um tal conjunto $x_1,\ldots,x_n$ satisfazendo (1) é chamado *solução.*

2.1 *Exemplos ilustrativos*

Consideramos alguns exemplos que servirão como base para ilustrar os conceitos desenvolvidos neste trabalho.

Sistema 1 (Duas equações e duas incógnitas)

$$\begin{cases} 0{,}97x_1 + 1{,}72x_2 = 1 \\ 2{,}28x_1 + 0{,}96x_2 = 2 \end{cases}$$

A solução desse sistema é $x_1 = \dfrac{744}{900} = 0{,}82666\ldots$ e $x_2 = 12$.

Sistema 2 (Duas equações e duas incógnitas)

$$\begin{cases} 0{,}96x_1 + 1{,}72x_2 + 0{,}76x_3 = 1 \\ 2{,}28x_1 + 0{,}96x_2 - 1{,}32x_3 = 2 \end{cases}$$

As soluções desse sistema são dadas por $x_1 = \dfrac{744}{900} + c$, $x_2 = \dfrac{12}{100} - c$ e $x_3 = c$ com c real arbitrário. Temos então uma família de soluções descritas pelo parâmetro c.

Sistema 3 (Três equações e duas incógnitas)

$$\begin{cases} 0{,}96x_1 + 1{,}72x_2 = 1 \\ 2{,}28x_1 + 0{,}96x_2 = 2 \\ 1{,}32x_1 - 0{,}76x_2 = 3 \end{cases}$$

Este sistema não tem solução. No entanto se a terceira equação for substituída por

$1{,}32x_1 - 0{,}76x_2 = 1$ mantidas as demais, teremos o sistema

[1] Os **solsis** são programas simples (Apêndice C de [7]) com objetivo didático, que fizemos usando a decomposição valor singular de A (Apêndice B de [7]).
[2] a ser definida
[3] sentido a ser definido

Sistema 4

$$\begin{cases} 0{,}96x_1 + 1{,}72x_2 = 1 \\ 2{,}28x_1 + 0{,}96x_2 = 2 \\ 1{,}32x_1 - 0{,}76x_2 = 1 \end{cases}$$

o qual tem $x_1 = \dfrac{744}{900} = 0{,}82666\ldots$ e $x_2 = 12$ como solução.

Sistema 5 (Três equações e três incógnitas)

$$\begin{cases} 0{,}96x_1 + 1{,}72x_2 + 0{,}76x_3 = 1 \\ 2{,}28x_1 + 0{,}96x_2 - 1{,}32x_3 = 2 \\ 1{,}32x_1 - 0{,}76x_2 - 2{,}08x_3 = 1 \end{cases}$$

Este sistema tem como solução geral $x_1 = \dfrac{744}{900} + c$, $x_2 = \dfrac{12}{100} - c$ e $x_3 = c$ com c real arbitrário.Por outro lado, o sistema

Sistema 6

$$\begin{cases} 0{,}96x_1 + 1{,}72x_2 + 0{,}76x_3 = 1 \\ 2{,}28x_1 + 0{,}96x_2 - 1{,}32x_3 = 2 \\ 1{,}32x_1 - 0{,}76x_2 - 2{,}08x_3 = 3 \end{cases}$$

não tem solução.

Terminologia: Um sistema linear em geral pode ser **possível (consistente) ou impossível (inconsistente).**

- **Sistema possível** é aquele que tem ao menos uma solução.

Exemplo: Sistemas 1, 2, 4 e 5.

Além disso é

possível determinado, se tem uma única solução.

Exemplo: Sistemas 1 e 5.

possível indeterminado, se tem mais de uma solução.

Exemplo: Sistemas 2 e 5.

- **Sistema impossível** é aquele que não tem solução.

Exemplo: Sistemas 3 e 6.

> ***Observação***: Diversos são os métodos que podemos empregar para estudar um dado sistema linear. Dentre eles, existe um teorema clássico de *Rouché-Capelli*, que nos permite decidir quando um dado sistema linear é possível ou impossível e, se possível, saber se é determinado ou não. Ainda mais, no caso de um sistema "quadrado" (quando o número de equações é igual ao número de incógnitas) *possível determinado*, há a bem conhecida *Regra de Cramer* para calcular explicitamente sua única solução.
>
> Hoje em dia, por questões práticas, é preciso resolver sistemas lineares com um grande número de equações e incógnitas. Neste caso, resolução analítica é uma tarefa, no mínimo, desanimadora. Por isso, precisamos escolher um método adequado e usar o Computador[4] .

2.2 Aproximação da Solução com o MATLAB

2.2.1 Sistema Linear na forma Matricial

O MATLAB opera essencialmente com MATRIZES. Daí, o primeiro passo é transformar nosso sistema linear de m equações e n incógnitas na forma de uma equação matricial equivalente. O sistema é escrito como uma *única equação* onde as operações de adição e multiplicação em cada equação do sistema é traduzida como operações correspondentes com matrizes.

Deste modo, o sistema (1) se escreve na forma matricial como

$$AX = b \tag{2}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ a_{21} \cdots a_{2n} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{m1} \cdots a_{mn} \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \tag{3}$$

A é a matriz do sistema, podendo ser quadrada ou retangular.

b é o termo independente do sistema, tem o mesmo número de linhas m que A.

X é a matriz incógnita do sistema, tem tantas linhas quanto número de colunas n de A.

[4]Veja por exemplo a seção 3.2.1 da referência [8].

Tabela 1 - Forma Matricial dos Sistemas

Sistema	$AX = b$
$\begin{cases} 0{,}97x_1 + 1{,}72x_2 = 1 \\ 2{,}28x_1 + 0{,}96x_2 = 2 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 0{,}96 & 1{,}72 \\ 2{,}28 & 0{,}96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
$\begin{cases} 0{,}96x_1 + 1{,}72x_2 + 0{,}76x_3 = 1 \\ 2{,}28x_1 + 0{,}96x_2 - 1{,}32x_3 = 2 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 0{,}96 & 1{,}72 & 0{,}76 \\ 2{,}28 & 0{,}96 & -1{,}32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
$\begin{cases} 0{,}96x_1 + 1{,}72x_2 = 1 \\ 2{,}28x_1 + 0{,}96x_2 = 2 \\ 1{,}32x_1 - 0{,}76x_2 = 3 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 0{,}96 & 1{,}72 \\ 2{,}28 & 0{,}96 \\ 1{,}32 & -0{,}76 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
$\begin{cases} 0{,}96x_1 + 1{,}72x_2 = 1 \\ 2{,}28x_1 + 0{,}96x_2 = 2 \\ 1{,}32x_1 - 0{,}76x_2 = 1 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 0{,}96 & 1{,}72 \\ 2{,}28 & 0{,}96 \\ 1{,}32 & -0{,}76 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
$\begin{cases} 0{,}96x_1 + 1{,}72x_2 + 0{,}76x_3 = 1 \\ 2{,}28x_1 + 0{,}96x_2 - 1{,}32x_3 = 2 \\ 1{,}32x_1 - 0{,}76x_2 - 2{,}08x_3 = 1 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 0{,}96 & 1{,}72 & 0{,}76 \\ 2{,}28 & 0{,}96 & -1{,}32 \\ 1{,}32 & -0{,}76 & -2{,}08 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
$\begin{cases} 0{,}96x_1 + 1{,}72x_2 + 0{,}76x_3 = 1 \\ 2{,}28x_1 + 0{,}96x_2 - 1{,}32x_3 = 2 \\ 1{,}32x_1 - 0{,}76x_2 - 2{,}08x_3 = 3 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 0{,}96 & 1{,}72 & 0{,}76 \\ 2{,}28 & 0{,}96 & -1{,}32 \\ 1{,}32 & -0{,}76 & -2{,}08 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

2.2.2 Aproximação da Solução

Quando a matriz A do sistema é quadrada e inversível, a solução é dada formalmente por $X = A^{-1} b$. No entanto, inverter diretamente a matriz A não é uma tarefa computacional muito simples.

Achar $X = A^{-1} b$ com o MATLAB corresponde à operação $X = A \backslash b$ a qual usa eliminação Gaussiana e não calcula a matriz A^{-1} diretamente. Quando a matriz A não é quadrada, a operação $A \backslash b$ varia de acordo com propriedades da matriz A. Por exemplo, se as colunas de A são linearmente independentes, $A \backslash b$ usa a decomposição ortogonal de A.

Vemos em seguida, a resposta obtida para cada sistema exemplo, usando primeiramente a função $A \backslash b$ e em seguida a resposta dada pelos **solsis**[5], os quais são programas simples, com objetivo didático, que fizemos usando a decomposição *valor singular de A*[6]. Esses resultados são comparados com as soluções de cada sistema na Tabela 2.

[5]Veja no Apêndice C de [7].

[6] Veja no Apêndice B de [7].

***Tabela 2** - Aproximação da Solução com o MATLAB*

Sistema	Solução	*A/b*	Solsis
1	0,82666... 0,12000...	0,8267 0,1200	0,8267 0,1200
2	0,82666...+ *c* 0,12000...- *c* 0... + *c*	0,8267 0,1200 0	0,5911 + *c*0,5774 0,3556 - *c*0,5774 -0,2356 + *c*0,5774
3	não tem solução	1,4222 -0,6000	Sistema impossível
4	0,82666... 0,12000...	0,8267 0,1200	0,8267 0,1200
5	0,82666...+ *c* 0,12000...- *c* 0... + *c*	Cuidado: Res. impreciso	0,5911 + *c*0,5774 0,3556 - *c*0,5774 -0,2356 + *c*0,5774
6	não tem solução	Cuidado: Res. impreciso	Sistema impossível

Algumas Conclusões da Tabela 2:

- Se A é matriz quadrada inversível então $A\backslash b$ dá uma aproximação da solução

- Se A é matriz quadrada não inversível então $A\backslash b$ é passível de erro.

- Se A é matriz não quadrada com mais linhas do que colunas e o sistema é possível determinado então $A\backslash b$ dá uma aproximação da solução.

3 Extensão. Solução no sentido de Mínimos Quadrados

***Objetivo*:** Dar sentido analítico e computacional ao seguinte problema de otimização:

Seja A uma matriz qualquer e b um vetor coluna cujo número de linhas é igual ao número de linhas de A.

Achar um vetor coluna X de norma (a ser escolhida) mínima, tal que $b^* = AX$ é o vetor mais próximo de b (num sentido a ser estabelecido).

3.1 Interpretação Geométrica do Conjunto de Soluções de $AX = b$

Vamos escrever AX da seguinte forma:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_nA_n\ ,$$

onde A_1, A_2,..., A_n são as colunas da matriz A, ou seja, na forma de uma combinação linear das colunas de A, tendo como coeficientes as coordenadas x_1,..., x_n do vetor X. O conjunto de todas essas combinações lineares é chamado de *conjunto imagem* de A. Deste modo, um sistema $AX = b$ terá solução se a coluna dada b pertencer ao conjunto imagem de A, caso contrário, não tem solução. Na primeira hipótese, o sistema terá solução única se as colunas de A forem linearmente independentes, caso contrário, isto é, se as colunas de A forem linearmente dependentes, terá uma infinidade de soluções.

O problema geral enunciado na introdução, que vamos associar a um sistema linear qualquer $AX = b$, terá a seguinte característica:

solução única e sua aproximação numérica pode ser dada por uma operação simples com o MATLAB.

Em particular:

- Se o sistema $AX = b$ é possível determinado, a solução do problema geral será a própria solução do sistema.

- Se o sistema $AX = b$ é possível indeteminado, a solução do problema geral será aquela de norma mínima, dentre todas as soluções do sistema $AX = b$.

- Se o sistema dado é impossível, a solução do problema geral dependerá da solução do sistema $AX = b^*$ onde b^* é o elemento do conjunto imagem de A tal que a norma de $b - b^*$ é mínima. Neste caso, $AX = b^*$ é sempre possível.

  - Se o sistema $AX = b^*$ é determinado, sua única solução é a solução do problema geral.

  - Se o sistema $AX = b^*$ é indeterminado, a solução do problema geral é aquela de norma mínima, dentre todas as soluções de $AX = b^*$.

Tomemos dois sistemas particulares para analisar a situação:

Sistema 7 (De três equações e duas incógnitas)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = b_3 \end{cases}$$

ou de outro modo equivalente

$$x_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Com os vetores

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} \text{ e } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

do espaço tridimensional (espaço IR^3), a fórmula $Y = x_1A_1 + x_2A_2$ com as variáveis x_1 e x_2 arbitrárias, define um dos seguintes subconjuntos $\{Y\}$ do espaço:

- $\{Y\} = \{0\}$, é a origem do espaço.
- $\{Y\}$ é uma reta passando pela origem.
- $\{Y\}$ é um plano passando pela origem.

Note que $\{Y\}$ não poderá ser o espaço IR^3 inteiro (só temos dois vetores !).

Tabela 3

{Y}	vetor b	Sistema 7
{0}	$=0$ $\neq 0$	possível indeterminado impossível
reta π	$\in \pi$ $\notin \pi$	possível indeterminado impossível
plano α	$\in \alpha$ $\notin \alpha$	possível determinado impossível

Sistema 8 (De duas equações e três incógnitas)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \end{cases}$$

ou, equivalentemente

$$x_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Com os vetores

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} \text{ e } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

do espaço bi-dimensional (plano IR^2), a fórmula $Y = x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3$ com as variáveis x_1 , x_2 e x_3 arbitrárias, define um dos seguintes subconjuntos do plano:

- {Y} = {0}, é a origem do espaço.
- {Y} é uma reta passando pela origem.
- {Y} é o plano inteiro.

Note que poderá ser o plano IR^2 inteiro, pois temos três vetores!

Tabela 4

{Y}	vetor b	Sistema 8
{0}	$=0$ $\neq 0$	possível indeterminado impossível
reta π	$\in \pi$ $\notin \pi$	possível indeterminado impossível
plano IR^2	$\in IR^2$	possível indeterminado

[7] dentre várias outras

[8] Veja a fórmula (5) do Apêndice A de [7].

Passos da Extensão

Passo 1:

Escolher o vetor b^* de {Y} **mais próximo** de b, ou seja, que torna mínima a distância $\|b^* - b\|$.

Passo 2:

Escolher o vetor X de **norma mínima** que satisfaz o sistema $AX = b^*$.

Assim, combinando estes procedimentos, chegamos a um problema bem determinado:

PROBLEMA: Achar o vetor coluna X de **norma mínima** que **minimiza o erro** $e(Z) = \|AZ - b\|$, dentre todos os vetores Z.

> ***Observação:*** Pode acontecer na prática que a norma ou noção de distância mais adequada ao problema em questão, seja diferente da norma euclideana usual. Portanto, temos neste caso um problema mais geral.

3.2 Decomposição Valor Singular e Pseudo-inversa com o MATLAB

É bastante interessante observar que existe uma noção de inversa generalizada[7] de uma matriz A de qualquer tipo, que resolve prontamente o problema acima descrito.

Trata-se da inversa generalizada de Moore-Penrose ou pseudo-inversa da matriz A.

Definição: Dada uma matriz A, retangular de tipo m x n, chamamos *inversa generalizada de Moore-Penrose ou pseudo-inversa* de A a qualquer matriz B de tipo n x m tendo as quatro propriedades seguintes:

(i) $ABA = A$ (iii) $(BA)^T = BA$

(ii) $BAB = B$ (iv) $(AB)^T = AB$.

Pode ser provado que existe uma única matriz B com estas propriedades[8] a qual denotaremos por pinv(A) . A pseudo-inversa A pode ser calculada com a função interna pinv do MATLAB.

3.2.1 Aproximação da Solução do Problema com o MATLAB, usando a Pseudo-inversa:

Dada uma matriz A e um vetor coluna b com o mesmo número de linhas que a, X de norma mínima que minimiza o erro $e(Z) = \|AZ - b\|$ é dado por

$$X = \text{pinv}(A)\, b.$$

Mais explicitamente, X = pinv(A) b é o único vetor coluna com as seguintes propriedades:

1. $(AX - b)^T Y = 0$, para todo $Y \in \{Y\}$

2. Se $(AZ - b)^T Y = 0$, para todo $Y \in \{Y\}$,

então $X^T X \leq Z^T Z$.

A primeira condição equivale ao fato de que AX é o único vetor do conjunto imagem $\{Y\}$ de A, tal que $AX - b$ é perpendicular a $\{Y\}$, enquanto que a segunda condição é equivalente ao fato de que, dentre todas as soluções Z de $AZ = AX$, o vetor solução X tem a menor norma.

Solução dos Sistemas Exemplos com o MATLAB, usando pinv.

A resposta do MATLAB aos problemas associados aos sistemas exemplos é resumida na tabela seguinte, onde podemos comparar os resultados anteriores.

Tabela 5

Sistema	Solução	A/b	Solsis	pinv
1	0,82666... 0,12000...	0,8267 0,1200	0,8267 0,1200	0,8267 0,1200
2	0,82666...+ c 0,12000...- c 0... + c	0,8267 0,1200 0	0,5911 + c0,5774 0,3556 - c0,5774 -0,2356 + c0,5774	0,5911 0,3556 -0,2356
3	não tem solução	1,4222 -0,6000	Sistema impossível	1,4222 -0,6000
4	0,82666... 0,12000...	0,8267 0,1200	0,8267 0,1200	0,8267 0,1200
5	0,82666...+ c 0,12000...- c 0... + c	Atenção: Res. impreciso	0,5911 + c0,5774 0,3556 - c0,5774 -0,2356 + c0,5774	0,5911 0,3556 -0,2356
6	não tem solução	Atenção: Res. impreciso	Sistema impossível	0,7481 0,0741 -0,6741

Referências Bibliográficas

[1] G.H. Golub, C.F. Van Loan, *Matrix Computations*, Johns Hopkins Series in the Mathematical Sciences **3 (1985)**.
[2] W. Greub, *Linear Algebra*, Springer-Verlag, Graduate Texts in Math., **23 (1975)**.
[3] K. Hoffmann, R. Kunze, *Álgebra Linear*, LTC, Rio de Janeiro (1979).
[4] R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge Univ. Press (1985).
[5] R. A. Horn, C. R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge Univ. Press (1991).
[6] H. F. Leckar, R. Sampaio, *Problemas de Auto-valores Generalizados. Fatoração de Matrizes*, Relatório Técnico, ILTC-Pós-Grad. Matemática -UFF (1982).
[7] H. F. Leckar, R. Sampaio, *Aproximando Soluções de AX = b com o MATLAB*, Relatório Técnico, PUC-Rio / UFF (1997).
[8] M. A. G. Ruggiero, V. L. da R. Lopes, *Cálculo Numérico, Aspéctos Teóricos e Computacionais*, McGraw-Hill, S.Paulo (1988).
[9] R. Sampaio, E. Cataldo, R. Riquelme, *Introdução ao MATLAB*, Laboratório de Vibrações, PUC-Rio (1997)
[10] MATLAB User's Guide, The MathWorks, Inc. (1994).