Opúsculo sobre π

Paulo Roberto Trales - *UFF*
ganprpr@vm.uff.br

Opúsculo sobre π

Vamos contar, de forma breve, momentos da história de um dos números mais famosos (e complicados!) da matemática: o número π . Para apresentar uma cronologia detalhada, precisaríamos de uma publicação extensa, com várias histórias, freqüentemente divertidas, e por vezes até inacreditáveis. Para ilustrar esse comentário inicial podemos citar alguns episódios. Primeiramente o que ocorreu em 1892 quando alguém anunciou no *New York Tribune* a redescoberta de um segredo perdido de longa data que trazia 3,2 como valor exato de π .

Na discussão ardente que se seguiu a esse anúncio muitas pessoas advogaram a favor do novo valor. Há também o projeto de lei nº 246, do ano de 1897, da Assembléia Legislativa do Estado de Indiana, que pretendia determinar o valor de π por lei. O projeto foi aprovado na Casa mas, depois de ser ridicularizado por alguns artigos e jornais, foi arquivado no Senado, apesar do apoio da Superintendência Estadual do Ensino Público. Além disso, desde a publicação, em 1931, de um trabalho dedicado a provar que $\pi = \frac{256}{81}$, muitas escolas e bibliotecas públicas dos Estados Unidos receberam exemplares autografados por parte do amável autor, de Cleveland, Ohio! Bem, dá para prever que se seguíssemos por essa linha de abordagem teríamos muito o que contar, mas esse não é o objetivo do nosso texto. Tentaremos dar, de forma lúdica, uma visão histórica do mais conhecido número da “Rainha das Ciências”. No nosso texto incluímos poucos itens sobre a vasta literatura fornecida pelos portadores da *morbus cyclometricus* - a doença da quadratura do círculo. A quadratura do círculo não pode ser feita com régua e compasso apenas, mas muitas pessoas, ainda pensando que o problema da quadratura do círculo está em aberto, imaginam soluções engenhosas e intrincadas, e ainda continuam submetendo “soluções” a instituições e revistas de matemática. Essas “contribuições”, muitas das vezes pitorescas, precisariam realmente de uma publicação exclusiva, o que não é objetivo do presente trabalho.

Queremos ainda citar aqui que a maioria dos textos sobre o tema afirma que o matemático e escritor inglês William Jones, numa publicação de 1706, foi o primeiro a propor a letra grega π “equivalente” ao nosso *p*, para representar a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro. Mas foi porque Euler, a partir de 1737, passou a usar essa letra para representá-lo, é que ela se tornou universal. Naturalmente uma questão de prestígio! É, mas a história do número π começou bem antes disso ...

O primeiro fato importante observado pelos geômetras, cerca de 4000 anos a.C., em relação às circunferências era que, *quanto maior o diâmetro maior o comprimento*; mais ainda, *que o comprimento da circunferência é proporcional ao seu diâmetro*. Medidas experimentais conjecturaram que essa constante de proporcionalidade era um pouco maior que 3. Alguns geômetras da antiguidade usaram com sucesso valores empíricos aproximados para essa constante como, por exemplo, $\frac{22}{7}$.

As primeiras aproximações do número π sempre estiveram ligadas ao cálculo de áreas e perímetros de círculos. Em escritos estimados de 1800 a.C., os babilônios obtiveram o valor 3 para π , segundo, parece, a fórmula $A = \frac{c^2}{12}$, onde c é o comprimento da circunferência, tomando $A = \pi r^2$, $c = 2\pi r$ e r = raio.

Embora nessa época o desenvolvimento dos egípcios, na matemática, fosse inferior ao dos babilônios, conseguiram para o número π uma melhor aproximação: $\frac{256}{81} = 3{,}1604...$

A impressão que ficou para a história é que nenhum desses dois povos chegou a perceber, até aquela época, a existência dessa constante, e muito menos que se tratava da relação entre a circunferência e seu diâmetro.

A evolução histórica dos estudos sobre π foi feita com as ferramentas matemáticas disponíveis, com os cálculos possíveis e objetivos desejados à época. Na verdade, os primeiros vestígios indicam que π foi pela primeira vez obtido empiricamente para a quadratura do círculo pelo escriba egípcio Ahmes, autor do famoso papiro de Rhind, por volta de 1700 a.C., onde constava que $\pi = \left(\frac{4}{3}\right)^4 = 3{,}1604$ ... e que trazia escrito: *a área de um círculo é igual à de um quadrado cujo lado é o diâmetro do círculo subtraindo-se sua nona parte*.

Posteriormente, estima-se que por volta de 1600 a.C., os mesmos babilônios, usando dessa feita algum procedimento ainda não suficientemente conhecido, situaram π entre $3\frac{1}{8}$ e $3\frac{1}{7}$,ou seja, $3{,}125 < \pi < 3{,}142$.

Os chineses, por volta de 1200 a.C., usavam nos seus cálculos $\pi = 3$.

O Velho Testamento, escrito cerca de 500 a.C., trazia $\pi = 3$. Aqueles que o redigiram, mais preocupados com assuntos religiosos, talvez não conhecessem a "melhor aproximação" que os babilônios já haviam achado para π há mais de 1000 anos atrás.

Diz-se que a primeira descoberta realmente científica de π foi obtida por Arquimedes, na Grécia, cerca de 240 a.C.. Arquimedes, de Siracusa, colônia grega ao sul da Silícia, foi indiscutivelmente a mais notável inteligência da antigüidade. Nascido por volta de 287 a.C., estudou em Alexandria até retornar à sua cidade natal, onde morreu em 212 a.C., como a mais ilustre vítima da guerra entre Roma e Cartago. O rei de Siracusa, ao qual servia o sábio, tomou partido dos cartaginenses e, em conseqüência, a cidade foi também atacada. A resistência de Siracusa tornou-se lendária e as máquinas bélicas idealizadas por Arquimedes foram fundamentais para a defesa de seu povo. Embora tivessem vindo de Roma ordens para que sua vida fosse poupada, isso não ocorreu. Encontrando-se Arquimedes absorto na resolução de um problema geométrico, não percebeu a entrada de um soldado romano que, de forma brusca, o interrompeu e intimou que o acompanhasse. Ele então retrucou dizendo que não queria ser perturbado naquele instante pois estava prestes a resolver uma intrigante questão. Essa resposta, no entanto, enfureceu o soldado, cuja espada tirou a vida de um dos mais talentosos matemáticos da humanidade. Arquimedes, portanto, morreu finalizando uma demonstração geométrica - talvez tenha sido essa a melhor forma que o destino encontrou para homenageá-lo e dignificá-lo.

Arquimedes foi também o autor de célebres descobertas científicas em física, além de ser um exímio calculista. Encontram-se na sua obra algumas aproximações racionais de raízes quadradas irracionais verdadeiramente notáveis. Não há adjetivos que possam qualificar seu trabalho, principalmente quando relembramos as dificuldades materiais da época: o papel não havia sido inventado; os papiros e pergaminhos eram escassos, os instrumentos de escrita rudimentares, a simbologia complexa, a iluminação péssima etc. Mesmo assim, ele produziu uma de suas maiores façanhas, o cálculo de π , onde utilizou pela primeira vez um método similar ao conceito de limite, considerado refinado, mesmo para os padrões de rigor contemporâneos.

A noção de limite, um dos pilares fundamentais da Matemática, tem sua origem atribuída a Eudóxio, de Cnidos, que viveu entre 408 a.C. e 335 a.C. e que foi outro gênio daquela fantástica safra de geômetras gregos. Acreditam alguns matemáticos que partes importantes dos 13 livros dos Elementos foram apenas transcritas, ordenadas e sistematizadas por Euclides mas, originalmente, produzidas um século antes, por Eudóxio. Ele foi também quem colocou sobre bases sólidas as teorias das proporções e dos números irracionais. Mas, infelizmente, como nenhum de seus escritos originais chegou até nossos dias, pensamos que sua reputação está longe de ser a de um geômetra que somente foi superado em talento, entre os séculos IV e II a.C., por Arquimedes.

A determinação do perímetro da circunferência desafiou matemáticos durante séculos porque todos os conhecimentos numéricos disponíveis sobre grandezas geométricas restringiam-se a segmentos retilíneos, nada se sabendo a respeito de relações métricas em linhas curvas. A abordagem de Arquimedes no tratamento do problema empregou a idéia de que a circunferência fosse considerada como o limite ao qual tendem duas famílias de polígonos inscritos e circunscritos a ela, cujos números de lados crescem indefinidamente. À medida que o número de lados cresce, mais o polígono se aproxima da circunferência, confundindo-se com ela no limite. O mesmo ocorre com polígonos circunscritos. Esse trabalho se encontra num tratado de Arquimedes, com apenas três proposições, intitulado *A medida de um círculo*. Arquimedes partiu de um hexágono regular, calculou os perímetros e áreas de polígonos regulares de 6, 12, 24, 48 e 96 lados, inscritos e circunscritos a uma circunferência, e mostrou que $\frac{10}{71} < \pi < \frac{10}{70}$. Note que a desigualdade anterior equivale a dizer que $3{,}14084 < \pi < 3{,}14285$ e foi obtida numa época em que não havia nenhuma notação conveniente para números. O método acima descrito, baseado nos polígonos regulares inscritos e circunscritos, é conhecido como *método clássico* de cálculo de π .

Voltando à apresentação cronológica do texto sobre o número π , contam alguns antigos papiros que na China, no início da era cristã, - por volta de 70 d.C. - o valor de π havia sido alterado de 3 para $\sqrt{10}$.

A primeira aproximação de π depois de Arquimedes digna de destaque foi dada na Grécia pelo astrônomo Claudio Ptolomeu (infere-se que ele viveu por volta de 150 d.C.) onde calculou as cordas de todos os ângulos de meio em meio grau, entre 0 e 180 graus, e obteve para π o valor aproximado de 3,14166. Esse valor foi obtido a partir de uma tábua de cordas que se encontra na *Syntaxis mathematica*, a maior e mais famosa obra de astronomia produzida na Grécia antiga - popularmente conhecida pelo título árabe de *Almagesto* - que fornece os comprimentos das cordas correspondentes aos ângulos de 0º a 180º, com incrementos de meio grau. Multiplicando-se o comprimento da corda do ângulo central de 1º grau por 360 e dividindo-se o resultado pelo comprimento do diâmetro do círculo, obtém-se o valor acima descrito de π .

Na China, cerca de 400 d.C., o valor utilizado para π era 3,14156, uma aproximação bem razoável para a época, embora não se conheça como os chineses chegaram a esse valor.

Ainda na China, por volta de 480 d.C., Tsu Ch'ung-Chih, um engenheiro autodidata, principalmente na aprendizagem da matemática, deu uma interessante aproximação racional para π - correta até a sexta casa decimal - pela fração $\frac{355}{113}$.

Por volta de 530 d.C., um dos mais antigos matemáticos hindus, Aryabbhata, deu $\frac{62832}{20000} = 3{,}1416$ como valor aproximado de π . Não se sabe como este valor foi obtido. Pode ser que tenha sido de fontes gregas mais antigas ou, talvez, do cálculo do perímetro de um polígono regular inscrito de 384 lados.

No ano de 1150, o matemático hindu Bhaskara chegou a várias aproximações de π . Deu $\frac{3927}{1250}$ como um valor acurado, $\frac{22}{7}$ como um valor impreciso e $\sqrt{10}$ para trabalhos corriqueiros. O primeiro valor pode ser sido tomado de Aryabbhata. É de origem incerta um outro valor, $\frac{754}{240} = 3{,}1416$, dado por Bhaskara (trata-se do mesmo valor encontrado por Ptolomeu, praticamente 1000 anos antes).

Por volta de 1429, Al-Kashi, assistente do astrônomo real de Samarcanda, Ulugh Beg, calculou π até a décima sexta casa decimal, pelo método clássico.

Nos séculos XV e XVI, com o desenvolvimento da trigonometria e uma melhor notação para os números, a determinação do comprimento de cordas tornou-se mais precisa e rápida. Matemáticos dessa época, ainda usando o método de Arquimedes, calcularam π com cada vez mais casas decimais.

Cerca de 1579, o eminente matemático francês François Viète encontrou π corretamente até a nona casa decimal pelo método clássico, usando polígonos de $6(2^{16}) = 393216$ lados. Descobriu também a equivalência do curioso produto infinito dado por:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \ldots,$$

um resultado significativo, porque as noções aritméticas, algébricas e trigonométricas invadiam cada vez mais o reino do infinitamente grande e do infinitamente pequeno, outrora dominado pela geometria. O produto de Viéte aparece facilmente se inscrevermos um quadrado num círculo e depois aplicarmos a fórmula trigonométrica recursiva $a_{2n} = a_n \sec \frac{\pi}{n}$ onde a_n é a área do polígono regular inscrito de *n* lados, fazendo *n* tender ao infinito.

Em 1585, Adrien Anthoniszoon trabalhou em cima de uma antiga razão chinesa, onde demonstrou que $\frac{333}{106} < \pi < \frac{377}{120}$. Note que a média aritmética desses numeradores e denominadores dá a fração $\frac{355}{113}$, encontrada por Tsu Ch'ung-Chih. Há indícios de que Valetin Otho, um discípulo de Rhaeticus, um dos primeiros construtores da tábua trigonométrica, pode ter introduzido esta razão para π no mundo ocidental numa data ligeiramente anterior; a saber, em 1573.

Por volta de 1593, o holandês Adriaen van Roomen, mais conhecido como Adrianus Romanus, determinou π corretamente até a quinta casa decimal pelo método clássico, usando polígonos de 2^{30} lados.

A manipulação desse tipo de número é bastante fácil. Começando pelo final, temos 2 + 1/4 = 9/4. O recíproco é 4/9 e, somando 3, obtemos 31/9. Tomemos de novo o recíproco, ou seja, 9/31, e adicionemos o 1 inicial para obter 40/31. É esta a resposta. Em termos de conveniência notacional, a formulação estranha pode ser abreviada para [1;3,2,4].

Podemos encontrar a fração contínua de qualquer número dado. Para um número racional como $\frac{40}{31}$ a fração acaba tendo fim. Para um irracional isto não acontece, o que fornece uma distinção clara entre os dois tipos de números, embora nem sempre este artifício seja muito simples de ser utilizado! O desenvolvimento de π nesse contexto forneceria então a seguinte "notação":

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 6, 1, 3, ...]$$

Observemos π mais de perto. Se cortarmos a fração contínua no segundo passo, obteríamos [3; 7], que daria $\frac{22}{7}$ uma fração já nossa conhecida. Cortando dois passos mais adiante, ou seja, em [3; 7, 15, 1], temos

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1}}}$$

e obteríamos a fração $\frac{355}{113}$ outra aproximação famosa para π. Numericamente, para dois e quatro passos, teríamos portanto

$$\frac{22}{7} = 3{,}1428571\ldots$$

$$\frac{355}{113} = 3{,}1415929\ldots$$

Considerando mais termos no desenvolvimento, naturalmente com uma quantidade muito maior de contas, obtém-se resultados cada vez mais próximos de π = 3,14159265.... Tente achar dessa forma, como exercício, o valor de π para cinco e seis passos.

O físico holandês Willebrord Snell, mais conhecido por sua descoberta da lei da refração, descobriu por volta de 1610 um aperfeiçoamento trigonométrico do método clássico de calcular π tal que cada par de limites ficasse consideravelmente mais próximo. Com seu método se conseguiu obter as trinta e cinco casas decimais de Ludolph van Ceulen usando polígonos de apenas 2^{30} lados. Com esses polígonos, o método clássico fornece apenas quinze casas. Para polígonos de noventa e seis lados, o método clássico fornece duas casas decimais, ao passo que o aperfeiçoamento de Snell fornece sete casas. Cerca de 1630, usando o refinamento de Snell, Grienberger calculou π até a trigésima nona casa decimal. Essa talvez tenha sido a última tentativa importante de calcular π pelo método dos perímetros.

A partir da metade do século XVII, a determinação de π passou a ser trabalhada com novas e poderosas ferramentas, que paulatinamente substituíram os métodos geométricos até então utilizados.

Aproximadamente em 1650, o matemático inglês John Wallis obteve a curiosa expressão

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8\ldots}{1.3.3.5.5.7.7\ldots}$$

Em 1654, o matemático e físico holandês Christiaan Huygens forneceu uma demonstração correta do refinamento de Willebrord Snell.

Em 1671, o matemático escocês James Gregory (1638-1675), tentando provar que é impossível uma solução euclidiana do problema da quadratura, obteve a série infinita

$$\text{arctg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

Gregory não percebeu que para x = 1 uma igualdade extremamente interessante viria a surgir:

$$\text{arctg } 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Em 1674, o resultado acima foi obtido e publicado por Leibniz. Esta série, por convergir muito lentamente, não é adequada para o cálculo de π, embora sob o ponto de vista estético, atenda bem ao sonho daqueles que buscavam uma representação especial para o número.

No final do século XVII, Abraham Sharp encontrou acertadamente as setenta e uma casas decimais de π usando a série de Gregory para $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Em 1706, John Machin obteve cem casas decimais de π usando a série de Gregory, juntamente com a relação

$$\frac{\pi}{4} = 4\text{arctg}\frac{1}{5} - \text{arctg}\frac{1}{239}$$

Em 1719, o matemático francês De Lagny obteve corretamente cento e doze casas decimais usando a série de Gregory para $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Em 1754, o matemático francês Jean Étienne Montucla, um dos primeiros historiadores da matemática, escreveu talvez a primeira “história” sobre o problema da quadratura.

Em 1755, Euler, usando outras relações trigonométricas, obteve uma série rapidamente convergente, o que lhe permitiu calcular as 20 primeiras casas decimais de π .

A partir de 1755, a Academia de Ciências da França declinou em examinar qualquer solução a mais do problema da quadratura para lá enviada, o que na verdade parece não ter adiantado muito, pois até hoje ainda aparecem alguns quadradores!

Na expansão de π com um número grande de decimais há outras questões além do desafio envolvido. Antes de 1761, uma das razões desses cálculos de casas cada vez maiores, era se verificar se os dígitos de π começavam a se repetir e, se fosse esse o caso, obtê-lo como um número racional exato, quem sabe com um denominador extremamente grande.

Em 1761, essa busca desenfreada para o objetivo supracitado teve fim, pois o matemático Johann Heinrich Lambert provou que π era um número irracional. Cabe aqui ressaltar que seu conterrâneo Euler já suspeitava desse fato, tendo inclusive conjecturado acertadamente em várias ocasiões que π seria transcendente. (Um número complexo se diz *algébrico* quando é raiz de algum polinômio de coeficientes racionais. Um número complexo que não é algébrico se diz *transcendente*).

Em 1777, o Conde de Buffon concebeu seu famoso *problema da agulha* pelo qual pode-se aproximar π por métodos probabilísticos: suponhamos que se tracem num plano horizontal um número grande de retas paralelas eqüidistantes entre si, sendo *a* a distância entre duas retas vizinhas quaisquer. Buffon mostrou que a probabilidade de que uma agulha de comprimento ℓ < a, lançada ao acaso sobre o plano, caia cortando uma das retas é dada por p = $\frac{2\ell}{\pi a}$.

Realizando-se efetivamente esse experimento um número grande de vezes e anotando-se os casos positivos, obtém-se um valor empírico de p que podemos usar na fórmula acima para calcular uma aproximação de π . O melhor resultado por esse caminho foi conseguido pelo italiano Lazzerini em 1901. Com 3408 lançamentos da agulha, ele obteve π corretamente até a sexta casa decimal! Seu resultado é superior ao de outros experimentadores às vezes vistos com suspeição. Há outros métodos probabilísticos para calcular π . Assim é que, em 1904, R. Chartres relatou uma aplicação do conhecido fato de que se dois inteiros positivos são escritos ao acaso, a probabilidade de que eles sejam primos entre si é $6/\pi^2$.

Em 1794, Adrien-Marie Legendre (1752-1833) mostrou que π^2 também é um número irracional.

Em 1844, o calculista relâmpago Zacharias Dase encontrou π corretamente até a duocentéssima casa decimal usando a série de Gregory juntamente com a relação

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8}$$

Dase nasceu em Hamburgo em 1824 e talvez tenha sido o mais extraordinário calculista mental de todos os tempos. Dentre suas façanhas figura o cálculo mental do produto de dois números de oito algarismos em cinqüenta e quatro segundos, de dois números de vinte algarismos em seis minutos, de dois números de quarenta algarismos em quarenta minutos e de dois números de cem algarismos em oito horas e cinco minutos. Calculou ainda a raiz quadrada de um número de cem dígitos em cinqüenta e dois minutos. Dase fez um uso mais valioso de seus poderes quando construiu uma tábua de logaritmos naturais de sete casas e uma tábua de fatores de todos os números inteiros entre 7.000.000 e 10.000.000. Por recomendação de Gauss, Dase foi contratado pela Academia de Ciências de Hamburgo até sua morte prematura aos trinta e sete anos de idade.

Em 1848, O inglês William Rutherford calculou π com duzentas e oito casas corretas, como se mostrou depois, usando a série de Gregory juntamente com a relação

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{70} + \operatorname{arctg}\frac{1}{99}$$

Em 1853, Rutherford retornou ao problema e obteve corretamente 400 casas decimais.

Em 1873, o inglês William Shanks, usando a fórmula de Machin, e após 15 anos de trabalho, calculou π com 707 casas decimais, com 527 casas corretas. Para se ter idéia do que isso ainda hoje representa, basta dizer que usando a expressão correta de π até a quadragésima casa decimal, o cálculo da medida da circunferência envolvendo todo o Universo dará um valor com a precisão de um próton, que é menor do que qualquer coisa que a vista humana possa enxergar. Por um longo tempo esse foi o feito mais fabuloso em termos da computação de π.

Já vimos as definições de número algébrico e de número transcendente. E que tipo de número é π? Bem, dentre as respostas que podem ser dadas a essa pergunta, talvez a mais conhecida seja a do matemático C. L. Ferdinand Lindemann (1852-1939), no final do século XIX, na sua demonstração que π é um irracional transcendente.

Em 1882, Lindemann provou que π é transcendente. O artigo, intitulado *" Uber die Zahl* π *"* da Mathematische Annalen mostrava que a equação $e^{ix} + 1 = 0$ não pode ser satisfeita se x é algébrico. Como Euler já havia mostrado que $x = \pi$ satisfaz à equação acima citada, segue-se que π não é algébrico. Para que a quadratura do círculo fosse possível com os instrumentos euclidianos, o número π teria que ser raiz de uma equação algébrica com uma raiz exprimível por raízes quadradas. Este resultado resolveu o famoso problema da quadratura do círculo, que vinha desde a antigüidade. O fato de π ser um número transcendente prova, definitivamente, ser impossível construir somente com régua não graduada e compasso, um quadrado e um círculo de mesma área, ou seja, que o problema da quadratura não pode ser resolvido com os instrumentos euclidianos.

Em 1846 o inglês D.F.Ferguson descobriu erros, começando na casa 528, no valor encontrado por Shanks para π e em 1947 deu um valor correto com 710 casas. No mesmo mês o americano J.W. Wrench Jr. publicou um valor de π com 808 casas, mas Ferguson encontrou um erro na casa 723. Em janeiro de 1948, Ferguson e Wrench publicaram juntamente um valor correto e testado de π com 808 casas. Wrench usou a fórmula de Machin, ao passo que Ferguson usou a fórmula

$$\frac{\pi}{4} = 3\text{arctg}\frac{1}{4} + \text{arctg}\frac{1}{20} + \frac{1}{1985}$$

Temos portanto que π é irracional, é transcendente e havia sido calculado com centenas de casas decimais. A sua história talvez tivesse chegado ao fim, se não fossem os computadores que entrariam em cena a partir de 1940 na implementação de cada vez mais sofisticados métodos numéricos. As aproximações de π começam a se contar daí em diante em milhares de casas, e interessantes questões surgiram quanto à distribuição dos algarismos de π. Emile Borel (1871-1956) questionara, por volta de 1947, a "normalidade" de π. Um número real se diz *simplesmente normal* se em sua expansão decimal todos os dez algarismos ocorrem com igual freqüência; e se diz *normal* se todos os blocos de algarismos de mesmo comprimento ocorrem com igual freqüência. Não se sabe ainda hoje se π ou $\sqrt{2}$ é normal ou mesmo simplesmente normal.

Em 1949, o ENIAC, computador eletrônico de Army Ballistic Research Laboratory de Aberdeeen, Maryland, calculou π com 2037 casas decimais. No início dos anos 60 o ENIAC, agora já obsoleto, foi desmontado e transportado para Smithsonian Institution como peça de museu.

Em 1959, François Genuys, em Paris, calculou π com 16.167 casas decimais, usando um IBM 704.

Em 1961, Wrench e Daniel Shanks, de Washington, calcularam π com 100.265 casas decimais usando um IBM 7090.

Em 22 de fevereiro de 1964, M. Jean Guilloud e seus colegas de trabalho na Comissão de Energia Atômica de Paris obtiveram uma aproximação de π que alcançava 250.000 casas decimais, num computador STRETCH. Exatamente um ano depois os mesmos pesquisadores, usando um CDC 6600, encontraram uma aproximação de π com 500.000 casas decimais.

Em 1973, Guilloud e seus colegas encontraram uma aproximação de π com 1.000.000 de casas, num CDC 7600.

Em 1981, dois matemáticos japoneses, Kazunori Miyoshi e Kazuhika Nakayama, da Universidade de Tsukuba, calcularam π com 2.000.038 algarismos em 137 horas, num computador FACOM M-200. Eles usaram a fórmula

$$\pi = 32\ \text{arctg}\frac{1}{10} - 4\ \text{arctg}\frac{1}{239} - 16\ \text{arctg}\frac{1}{515}$$

e testaram seu resultado na fórmula de Machin.

Em janeiro de 1986, D.H. Bailey da NASA, Armes Research, Califórnia, fez funcionar um supercomputador Cray-2 por 28 horas para obter π com 29.360.000 dígitos. Seu código se baseava num algoritmo de J.M. e P.D. Borwein da Universidade Dalhousie. Bailey testou seu código num algoritmo mais lento, também desenvolvido pelos Borwein, e verificou a precisão de seu resultado. Pouco depois, em 1987, o pesquisador Yasumasa Kanada, da Universidade de Tókio, usando um supercomputador NEC SX-2 e o algoritmo dos Borwein, calculou π com 137.217.700 dígitos.

Mais recentemente, ressurgiu o interesse em pesquisas pela via computacional no sentido de se conseguir informações estatísticas referentes à "normalidade" de π. Os cálculos de π foram realizados para fornecer informações estatísticas sobre a questão. Avaliações sobre essas extensas aproximações de π parecem sugerir que o número talvez seja normal. Com relação à possível normalidade de π é interessante observar que a seqüência 314159 dos seis primeiros algarismos de π aparece seis vezes nos dez milhões de dígitos da expansão de π enquanto que a seqüência 0123456789 não aparece nunca.

Dentre as curiosidades ligadas a π podemos também citar que, a partir do início do século passado, foram criadas várias mnemônicas concebidas para memorizá-lo até um número grande de casas decimais. Os seguintes versos em inglês, de A.C. Orr, apareceram no Literary Digest. Basta substituir cada palavra pelo número de letras que a compõe para obter π corretamente até a trigésima casa decimal.

Now I, even I, would celebrate

In rhymes unapt, the great

Immortal Syracusan, rivaled nevermore,

Who in his wondrous lore,

Passed on before,

Left men his guidance,

How to circles mensurate.

Em 1914 apareceu a sequinte mnemônica semelhante no Scientific American Supplement: “See, I have a rhyme assisting my feeble brain, its tasks ofttimes resisting. Eis duas outras mnemônicas: “How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics.”, ou ainda, “May I have a large container of coffee.”

Uma, em português: “Sou o medo e temor constante do menino vadio.”

Outra curiosidade para memorizar π faz uso do número 113 355. Esse número parece ser bem mais fácil de ser memorizado do que π não é mesmo? Vamos agora “cortar” aquele número entre o terceiro e o quarto algarismos. Ficamos portanto com o primeiro número sendo 113 e com o segundo sendo 355. A divisão desses números utilizando a fração $\frac{355}{113}$ fornece, como já vimos, uma aproximação racional bastante razoável de π .

Dos anos 90 até nossos dias todas as marcas, em termos de milhões de dígitos de π vêm sendo constantemente ultrapassadas por cada vez mais poderosos super computadores. Há outras razões para se calcular π com um grande número de casas decimais, o que é muito valioso para a ciência da computação, porque idealizar programas para cálculos tão extensos certamente conduz a uma maior habilidade em programação. E também porque, tão logo se tenha usado com êxito um programa num computador, pode-se empregá-lo para testar se um novo equipamento está operando adequadamente. Obviamente, o alvo dessa corrida já não é mais “apenas” o número π . Além da competição entre países e empresas, importa cada vez mais descobrir-se novas técnicas, das quais podem resultar subprodutos importantes e, além disso, como todos sabemos, é impossível conter a curiosidade do ser humano...

Bibliografia

Boyer, C. B., “*História da Matemática*”. Editora Edgard Blucher, 1974.

Costa, R. C. F., “*O que é um Número Transcendente*?”. RPM 1, 1982.

Lima, E. L., “*O que é o número* π ?”, RPM 6,1985.

Garbi, G. G., “*O Romance da Equações Algébricas*”. Makron Books, 1997.

Eves H., “*Introdução à História da Matemática*”. Editora da Unicamp, 1997.

Machado A. S., “*Matemática-Versão Azul*” . Atual Editora, 1993.