O R^2 como modelo de espaço vetorial: aspectos históricos

Ion Moutinho Gonçalves- UFF
ion.moutinho@ig.com.br

O R^2 como modelo de espaço vetorial: aspectos históricos

Introdução

O R^2 representa a classe dos pares de números (x,y), com $x, y \in R$. Na seqüência de estudo escolar, este conjunto é visto pela primeira vez, devido a sua interpretação geométrica, na análise de gráficos de funções. Nesse instante, o R^2 aparece simplesmente como um conjunto. Apenas se sabe que é constituído de elementos, normalmente chamados de pontos, com uma representação gráfica – um plano formado a partir de uma origem e duas retas perpendiculares.

Posteriormente, no último ano do ensino médio, o R^2 volta a fazer parte do programa de estudo, mas de forma mais independente. Novos elementos são associados ao conjunto, com várias aplicações geométricas. Este estudo é interessante porque motiva o desenvolvimento de novos temas e também utiliza conhecimentos de outros assuntos, como matrizes, determinantes, geometria, funções e manipulações algébrica, além de dar a oportunidade de explorar aplicações em outras áreas como física, astronomia, geografia e computação gráfica.

A maneira como o R^2 normalmente é visto no ensino médio apresenta o conjunto como um modelo da geometria euclideana. Entretanto, esta não é a única forma de estudá-lo. Existem outras teorias, com linguagens e resultados próprios, que têm o R^2 como modelo.

A proposta deste texto é expor de modo resumido o R^2 no contexto da álgebra linear, dando ênfase ao método axiomático. Discutiremos as vantagens didáticas, a eficiência, a importância e as conseqüências deste estudo. Um dos objetivos desta exposição algébrica é buscar suavizar um pouco o estudo de espaços vetoriais. Apresentando um modelo de espaço vetorial para se desenvolver os principais conceitos do assunto, o estudo fica mais concreto, simpático e, provavelmente, mais estimulante. Esta é uma proposta que visa diminuir a distância entre o ensino médio e o ensino superior.

Um modelo de geometria euclideana (plana)

O estudo matemático da geometria se dá a partir de dois conjuntos, um conjunto de retas e um conjunto de pontos, e mais uma coleção de relações entre estes, os axiomas. Um modelo de geometria é simplesmente um exemplo de geometria, isto é, é um determinado objeto matemático o qual satisfaz os axiomas de definição da geometria.

Vejamos como o R^2 pode ser visto como um modelo de geometria euclideana. Primeiro devemos definir os elementos primitivos da teoria: os *pontos* do R^2 são simplesmente seus elementos, isto é, os pares de números (x,y); as *retas* são os conjuntos da forma

$\{(x,y) \in R^2 \mid x = a\}$ - retas verticais

ou

$\{(x,y) \in R^2 \mid y = ax + b\}$ - retas não-verticais,

onde a e b são números reais fixados.

O R^2 passa a ser visto como um modelo de *geometria de incidência* se satisfizer o seguinte conjunto de axiomas:

GI1) Toda reta possui pelo menos dois pontos.

GI2) Dados dois pontos distintos, estes pertencem a uma única reta.

GI3) Existem três pontos que não pertencem a uma mesma reta.

De fato, os pontos e as retas do R^2 satisfazem os axiomas da geometria de incidência e a verificação é bastante simples. Por exemplo:

GI2) Sejam (x_1,y_1) e (x_2,y_2) pontos distintos de R^2. Temos duas possibilidades: $x_1 = x_2$ ou $x_1 \neq x_2$.

Caso $x_1 = x_2$: Tomemos $a = x_1$. Então os pontos dados pertencem à reta vertical $r = \{(x,y) \in R^2 \mid x = a\}$.

Caso $x_1 \neq x_2$: Tomemos $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (Note que a está bem definido.) e $b = y_2 - ax_2$.

É imediato verificar que os pontos pertencem à reta $r = \{(x,y) \in R^2 \mid y = ax + b\}$.

Falta verificar a unicidade. Seja s uma reta qualquer contendo os pontos dados (x_1,y_1) e (x_2,y_2).

Caso 1: $s = \{(x,y) \in R^2 \mid x = m\}$. Então, $x_1 = m$ e $x_2 = m \therefore x_1 = x_2 \therefore$ estamos no caso $r = \{(x,y) \in R^2 \mid x = a\}$, com $a = x_1$. Daí, $m = a$ e $s = r$.

Caso 2: $s = \{(x,y) \in R^2 \mid y = mx + n\}$. Neste caso,

$$\begin{cases} y_1 = mx_1 + n \\ y_2 = mx_2 + n \end{cases} \quad \therefore \; y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

$$\therefore \; m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a \quad \therefore \; n = b.$$ E, assim, $s = r$.

(Pergunta: onde usamos a hipótese de que os pontos são distintos?)

Seguindo este padrão, definimos todos os elementos geométricos que precisarmos, como distância entre pontos, segmentos de reta, ângulo e etc. Uma vez que verifiquemos todos os axiomas da geometria euclideana, podemos dizer que o R^2 é um modelo de geometria euclideana. A verificação de todos os axiomas é um trabalho um pouco longo e minucioso, mas que não é difícil e também é bastante proveitoso. Mais detalhes sobre este trabalho podem ser vistos em [Mi].

Sendo um exemplo particular de um estudo geral, vale que a teoria desenvolvida em geometria, ou especificamente, que os resultados obtidos na teoria, são fatos que dizem respeito ao conjunto R^2. Assim, a teoria da geometria pode ser útil ao conjunto R^2. Por exemplo, vamos verificar que os segmentos AB e AC são perpendiculares, com $A = (1,1)$, $B = (2,0)$ e $C = (3,3)$. Independente da pouca familiaridade com o R^2 que um estudante possa ter neste momento, a solução, do ponto de vista geométrico, é bastante simples. Os segmento AB e AC são perpendiculares se, e só se, o triângulo ABC é retângulo (com ângulo reto no vértice A). Por sua vez, ABC é retângulo se, e só se, as medidas de seus lados satisfazem à condição do teorema de Pitágoras,

$$d(A,B)^2 + d(A,C)^2 = d(B,C)^2.$$

É imediato fazer as contas $d(A,B)^2 = 2$, $d(A,C)^2 = 8$ e $d(B,C)^2 = 10$, donde podemos concluir o pedido.

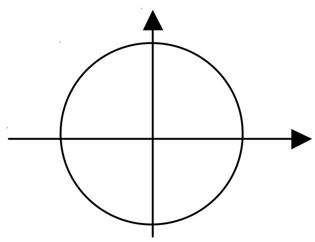
Estamos vendo que, ao fazermos algumas identificações do R^2 com a geometria plana, podemos resolver problemas do R^2 com conhecimentos de geometria. O curioso nesta forma de pensar é que às vezes o contrário também pode ser interessante. Com um pouco de habilidade no uso das propriedades básicas do R^2, podemos resolver problemas de geometria, algumas vezes de forma mais eficiente. Por exemplo, considere os seguintes resultados.

Teorema: *Seja c um círculo de diâmetro 2r e considere um triângulo ABC inscrito no círculo de modo que d(A,B) = 2r. Então ABC é um triângulo retângulo.*

Prova: Considere o sistema de coordenadas onde a origem O coincide com o centro do círculo. Então $A = (-r, 0)$, $B = (r,0)$ e $C = (x,y)$, com x e y satisfazendo

$$d(C,O) = r \text{ ou } \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = r,$$

ou ainda, $x^2 + y^2 = r^2$. ABC é um triângulo retângulo se, e só



se,

$$d(A,B)^2 = d(A,C)^2 + d(B,C)^2.$$

Fazendo as contas, vemos que

$$d(A,B)^2 = (r - (-r))^2 + (0 - 0)^2 = 4r^2,$$

$$d(A,C)^2 = (x - (-r))^2 + (y - 0)^2 = (x + r)^2 + y^2 = x^2 + 2xr + r^2 + y^2,$$

$$d(B,C)^2 = (x - r)^2 + (y - 0)^2 = (x - r)^2 + y^2 = x^2 - 2xr + r^2 + y^2,$$

donde verificamos que

$$d(A,C)^2 + d(B,C)^2 = x^2 + 2xr + r^2 + y^2 + x^2 - 2xr + r^2 + y^2 = 2(x^2 + y^2) + 2r^2 = 4r^2 = d(A,B)^2.$$

Teorema: *Dado um segmento de reta AB existe um triângulo equilátero que tem AB como um de seus lados.*

Prova: Seja $r = d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ .Considere a equação dos pontos que distam de *A* *r* unidades, isto é, $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$. Façamos o mesmo com relação a *B*, ou seja, $(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r^2$. Seja $C = (x_3, y_3)$ uma solução do sistema

$$\begin{cases}(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r^2\end{cases}$$

ABC é o triângulo pedido.

Observação: Apesar deste último resultado geométrico ser bastante intuitivo, sua demonstração geométrica rigorosa é bastante trabalhosa.

Esta forma de estudar é conhecida como geometria analítica. É importante observar que estes dois resultados foram provados para o conjunto R^2. Mesmo que este seja um modelo de geometria, não significa que um resultado válido para o R^2 seja um resultado da geometria. Sendo um exemplo particular de geometria, vale que toda proposição geométrica também vale para R^2, mas não o contrário, não necessariamente. Contudo, o desenvolvimento de resultados para um exemplo particular pode ser uma boa fonte de pesquisa para novos resultados em teorias matemáticas gerais.

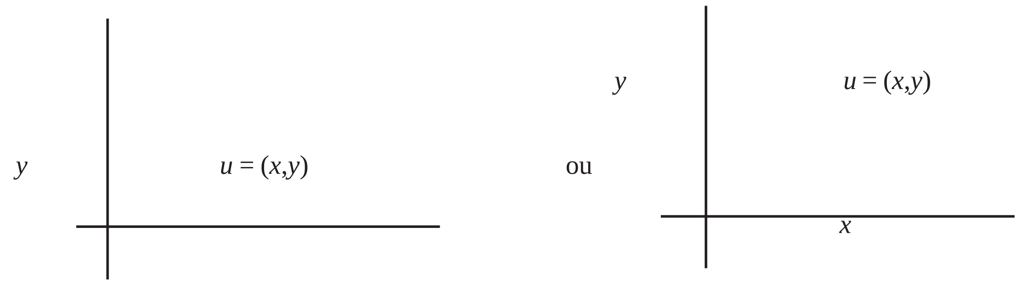
Um modelo de espaço vetorial

Vejamos agora o conjunto R^2 dentro de outro enfoque, o da álgebra linear. O conjunto é o mesmo e seus elementos são os mesmos, só muda a interpretação.

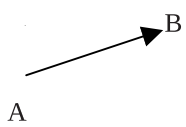
Neste contexto, os elementos de R^2 são chamados *vetores* e os números reais são chamados *escalares*. Com esta nomenclatura, é comum usar as letras *u*, *v* e *w* para representar os vetores de R^2, isto é, escrevemos, por exemplo, $u = (x,y) \in R^2$. Para os escalares usaremos as primeiras letras do alfabeto, por exemplo $a \in R$. Às vezes pode ser conveniente denotar os vetores com letras encimadas com uma flecha, digamos $\vec{u}$.

Assim, os vetores do R^2 são o que na 2ª seção chamamos de pontos. Do ponto de vista geométrico, podemos também pensar num vetor $u = (x,y)$ como um segmento de reta orientado tendo como origem as coordenadas (0,0) e extremidade final (x,y).

Representação geométrica



O R^2 com esta interpretação serve como o modelo matemático para o estudo de grandezas da natureza que não são determinadas meramente por um número. Por exemplo, o deslocamento no plano depende, não só da distância percorrida, mas também da direção e do sentido. Geometricamente, o deslocamento pode ser visto como uma flecha, que indica o tamanho do deslocamento pelo seu comprimento, a direção do deslocamento pela sua própria direção, e o sentido do deslocamento pela sua orientação da seta. Assim, na figura abaixo, o deslocamento do ponto *A* para o ponto *B* pode ser representado como



Com isso, este estudo de vetores pode ser motivado pelas questões envolvendo grandezas vetoriais. A primeira questão é saber descrever um vetor, isto é, seu comprimento e direção. Segundo o teorema de Pitágoras, o *comprimento do vetor* $u = (x,y)$ é dado por

$$||u|| = d(O,u) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

A *direção de um vetor* $u = (x,y)$ pode ser determinada pelo ângulo θ que u faz com o eixo x. Assim, a direção é determinada pela expressão

$$\text{tg}\,\theta = \frac{y}{x}$$

A próxima questão é estudar operações de R^2 que representem as composições de vetores.

Definição: Para os vetores do R^2, definimos as operações *adição de vetores*, +, e *multiplicação de vetor por escalar*, . , segundo as expressões

$$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

e

$$a \,.\, (x_1,y_1) = (a.x_1, a.y_1), \text{ onde } a \in R.$$

As duas operações definidas acima possuem as seguintes representações geométricas:

Assim, se u e v são vetores de R^2, $u+v$ é o vetor que representa uma diagonal do paralelogramo formado pelos pontos O, u, v e $u+v$. Em particular, $||u+v||$ é o valor do comprimento desta diagonal.

Observação: Existem possibilidades de se apresentar os conceitos da geometria, da geometria analítica e da álgebra linear. A questão é decidir como apresentá-los e relacioná-los. Na proposta deste texto, damos ênfase aos conceitos no contexto da álgebra linear. Um exemplo significativo de como a postura adotada pode fazer diferença é o da definição de vetores. Quando esta noção é apresentada a partir da geometria, é apresentada como um classe de equivalência, um conceito nada amigável para a grande maioria dos alunos. Quando apresentado no contexto da álgebra linear, como acima, o vetor aparece como um objeto muito simples, coincide com a noção de ponto e é apenas uma "troca de nomes". Esta simplificação de conceituação não deve causar nenhum prejuízo. As questões que pedem o deslocamento de vetores estão ligadas apenas ao desenho, ou à representação, e não ao desenvolvimento de fórmulas.

Já neste ponto podemos perceber a diferença deste estudo. Do ponto de vista da geometria analítica, a equação $y = ax + b$ representa uma reta, ou, se quiser ser mais preciso, as soluções da equação formam uma reta. De qualquer forma, não parece natural ver a equação $y = ax + b$ e enxergar uma reta. Intuitivamente, acredito que enxergamos uma reta assim que conhecemos sua direção e algum ponto por onde passa.

Vejamos então a equação da reta do ponto de vista da álgebra linear. Sejam $v \in R^2$ e $t \in R$. Então $tv \in R^2$ é um vetor com mesma direção que v, só que com comprimento diferente. Fazendo variar os valores de t, formamos uma reta contendo o vetor v. Se quisermos que a reta passe por determinado ponto $A \in \mathbb{R}^2$, basta considerar os pontos

$$P = tv + A,\ t \in \mathbb{R}.$$

Se o leitor se perdeu nesta última consideração, basta olhar o desenho com os elementos em questão dados que o entendimento será facilitado.

Fizemos algumas considerações geométricas a respeito destes novos conceitos para o $\mathbb{R}^2$. Mas o que caracteriza este estudo é a exploração das propriedades algébricas. A partir das definições das operações deduz-se as seguintes

Propriedades:

S1) $u+(v+w) = (u+v)+w,\ \forall\ u,v,w \in \mathbb{R}^2$.

S2) $0 = (0,0)$ é tal que $u+0 = 0+u = u,\ \forall\ u \in \mathbb{R}^2$.

S3) $\forall\ u \in \mathbb{R}^2,\ \exists\ -u \in \mathbb{R}^2$ tal que $u+(-u) = (-u)+u = 0$.

S4) $u+v = v+u,\ \forall\ u,v \in \mathbb{R}^2$.

P1) $a.(b.u) = (a.b).u,\ \forall\ u \in \mathbb{R}^2,\ \forall\ a,b \in \mathbb{R}$.

P2) $1.u = u,\ \forall\ u \in \mathbb{R}^2$.

P3) $(a+b)u = au + bu$.

P4) $a(u+v) = au+av$.

A verificação destas propriedades é fácil. Por exemplo:

P2) Seja $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Então $1.u = 1.(x,y) = (1.x,1.y) = (x,y) = u$.

O uso destas novas propriedades pode funcionar como uma nova linguagem de manipulação para os objetos de $\mathbb{R}^2$. Esta pode facilitar o desenvolvimento de contas em $\mathbb{R}^2$, ou justificativas de propriedades de seus elementos. Por exemplo, temos outras propriedades operacionais em $\mathbb{R}^2$, como

A) $u+v = u+w \Rightarrow v = w$.

B) $a.u = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $u = 0$.

C) $(au + bv) + (cu + dv) = (a + c)u + (b + d)v$.

Vejamos a justificativa de A). Poderia ser feita assim,

Prova: Sejam $u = (x_1,y_1)$, $v = (x_2,y_2)$ e $w = (x_3,y_3) \in \mathbb{R}^2$. Então,

$$u+v = u+w \Rightarrow (x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1,y_1) + (x_3,y_3) \Rightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_3, y_1 + y_3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = x_1 + x_3 \\ y_1 + y_2 = y_1 + y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_3 \\ y_2 = y_3 \end{cases} \Rightarrow (x_2,y_2) = (x_3,y_3)$$

$$\Rightarrow \mathrm{v} = \mathrm{w}.$$

Porém, podemos seguir o espírito do comentário acima, e justificar da seguinte maneira:

Prova: Sejam $u,v \in \mathrm{R}^2$. Então,

$u+v = u+w \Rightarrow (-u)+(u+v) = (-u)+(u+w) \Rightarrow ((-u)+u)+v = ((-u)+u)+w \Rightarrow 0+v = 0+w \Rightarrow v = w$.

A segunda prova utiliza uma forma de pensar que implica não se preocupar com o objeto em si, mas somente com suas propriedades. Isto tem a grande vantagem de simplificar a escrita, como se pode ver. Mais ainda, a demonstração teve um desenvolvimento inteiramente análogo a um caso familiar de propriedade dos números reais.

Vejamos porque as propriedades algébricas podem ser importantes.

Exemplo: Determinar uma equação vetorial da reta que contém os pontos $A = (-2,1)$ e $B = (0,3)$.

Solução 1: A equação é da forma $P = tv + A$. Fazendo $P = B$ e $t = 1$, temos

$B = v + A$,

Ou $(0,3) = (a,b) + (-2,1) \therefore \begin{cases} 0 = a - 2 \\ 3 = b + 1 \end{cases} \therefore v = (2,2)$.

Solução 2: Do ponto de vista algébrico, evitando o uso de coordenadas, a solução poderia ser: a partir da equação $B = v + A$ temos $B + (-A) = v + A + (-A)$, ou simplesmente, $v = B + (-A) = (0,3) + (2,-1) = (2,2)$.

Se a segunda solução não parece muito vantajosa, considere o próximo

Exemplo: Resolva o sistema de equações vetoriais $\begin{cases} (1,-4) = u + v \\ (2,-2) = -u + 2v \end{cases}$

Solução: Sabendo álgebra, somamos as duas linhas para obter $(3,-6) = 3v \therefore v = (1,-2)$.

Daí, $u = (1,1) - v = (1,1) - (1,-2) = (0,3)$.

Experimente resolver o sistema usando coordenadas. Depois imagine o mesmo tipo de problema, só que em R^3.

Observação: Definimos a diferença entre vetores por $u - v = u + (-v)$. Observe que, geometricamente, o vetor $u - v$ representa a segunda diagonal do paralelogramo gerado por u e v.

Com relação a aplicações geométricas, o R^2 possui uma estrutura algébrica mais rica ainda que passamos a considerar.

Definição: A operação *produto interno* em R^2 é definida por

$$\langle (x_1,x_2), (y_1,y_2) \rangle = x_1.y_1 + x_2.y_2.$$

Este produto interno está definido de modo construtivo. A princípio, qualquer conta que queiramos fazer com o produto interno nos leva a fazer uso de coordenadas. Então o próximo passo é deduzir algumas propriedades algébricas para esta nova operação.

Propriedades:

a) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
b) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
c) $\langle a.u, v \rangle = a.\langle u, v \rangle$
d) $\langle v, v \rangle \geq 0$
e) $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

A verificação é consequência imediata da definição de $\langle \ , \ \rangle$. Estas propriedades são suficientes para se desenvolver todas as aplicações relativas a produto interno sem precisar fazer uso de sua definição explícita. Por exemplo:

A) $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$

B) $\langle u - v, w\rangle = \langle u, w\rangle - \langle v, w\rangle$

C) $\langle u, a.v\rangle = a.\langle u, v\rangle$

D) $\langle a.u + b.v, w\rangle = a.\langle u, w\rangle + b.\langle v, w\rangle$

Assim, a propriedade *A*) pode ser verificada diretamente a partir da definição de produto interno. Consideramos os vetores $u = (x_1,y_1)$, $v = (x_2,y_2)$ e $w = (x_3,y_3)$ e começamos as contas. Ou então, deduzimos a propriedade a partir das primeiras propriedades já verificadas. Por exemplo:

$$\langle u, v + w\rangle = \langle v + w, u\rangle = \langle v, u\rangle + \langle w, u\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$$

uma solução clara, simples e, portanto, mais confiável.

Pensando no R^2 como um modelo matemático para problemas envolvendo vetores, devemos sempre buscar interpretações geométricas para os objetos da nossa teoria matemática. Imediatamente podemos ver que $||u|| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ ou $||u||^2 = \langle u, u\rangle$. Mas o mais importante é tentar dar um sentido geométrico à expressão geral $\langle u, v\rangle$. Para isto façamos antes algumas contas algébricas.

Verifique como exercício:

1) Vale que:

a) $||u + v||^2 = ||u||^2 + 2\langle u, v\rangle + ||v||^2$

b) $||u - v||^2 = ||u||^2 - 2\langle u, v\rangle + ||v||^2$

c) $||u + v||^2 + ||u - v||^2 = 2(||u||^2 + ||v||^2)$

2) $\langle u, v\rangle = 0$, se, e somente se, $||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$.

Aqui vemos outro exemplo da eficiência desta teoria. A solução do exercício 1-c) deve sair de forma razoavelmente natural e simples. Além disso, como consequência, pode-se deduzir o seguinte fato geométrico: se *ABCD* é um paralelogramo, a soma dos quadrados dos lados do paralelogramo é igual a soma dos quadrados das diagonais, isto é,

$||AC||^2+||BD||^2 = 2(||AB||^2+||BC||^2) = ||AB||^2+||BC||^2+||CD||^2+||DA||^2$.

É quase sempre assim, os problemas algébricos são simples e os resultados geométricos aparecem naturalmente.

O exercício 2) permite uma interpretação interessante para $\langle \ , \ \rangle$. Os vetores *u*, *v* e *u*+*v* formam um triângulo. A relação métrica do exercício é possível se, e somente se, *u* e *v* são vetores ortogonais, isto é, formando um ângulo reto (teorema de Pitágoras). Assim, *u* e *v* são ortogonais se, e só se, $\langle u, v\rangle = 0$.

u $\quad$ $u + v$

v

Podemos melhorar esta última interpretação geométrica para o produto interno. Considere dois vetores do plano e_1 e e_2 satisfazendo $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$ e $||e_1|| = ||e_2|| = 1$. Decompondo um vetor qualquer do plano, $v \in R^2$, podemos ver (através de um desenho se necessário) que existem a e b reais tais que

$$v = a.e_1 + b.e_2.$$

Mas, usando as propriedades de e_1 e e_2, vemos facilmente que $\langle v, e_1 \rangle = a$ e $\langle v, e_2 \rangle = b$. Assim,

(1) $$v = \langle v, e_1 \rangle .e_1 + \langle v, e_2 \rangle .e_2.$$

Por outro lado, se observarmos graficamente a situação dos vetores, temos a seguinte figura.

Fazendo uso das relações trigonométricas tiramos que:

(2) $$\text{proj}_1(v) = \cos(\theta).||v|| \text{ e } \text{proj}_2(v) = \text{sen}(\theta).||v||.$$

Juntando as equações (1) e (2) temos que

$$\langle v, e_1 \rangle = \cos(\theta).||v||.$$

Esta fórmula vale para vetores v e e_1 quaisquer, só com a condição $||e_1|| = 1$. Se u é um vetor qualquer, fazendo $e_1 = \dfrac{u}{||u||}$ temos $||e_1|| = 1$. Daí,

$$\langle v, u \rangle = \left\langle v\ , ||u|| \frac{u}{||u||} \right\rangle = ||u|| \langle v, e_1 \rangle = ||u||.\cos(\theta).||v||.$$

Assim, podemos concluir a seguinte fórmula que fornece uma interpretação geométrica para o produto interno.

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle}{||u|| \, ||v||}$$

onde θ é o ângulo entre os vetores u e v. Deduz-se também a relação muito usada nos exercícios de física,

$$\text{Proj}_v(u) = \frac{\langle u, v \rangle}{||v||^2}.v$$

Observação: Os últimos resultados obtidos envolvendo produto interno não são exatamente triviais. O leitor menos experiente deverá precisar de um pouco mais de tempo para entender bem os argumentos acima. Contudo, para os principais objetivos deste artigo, o mais importante é apenas conhecer as propriedades algébricas e apreciar suas aplicações. Vejamos algumas aplicações geométricas deste estudo algébrico.

Exemplo: Considere o triângulo *ABC* (ver fig. mais abaixo). Vamos identificar o segmento *AB* com o vetor $u = B - A$ e o segmento *AC* com o vetor $v = C - A$. Assim, o segmento *CB* fica sendo o vetor $u - v$. Vamos buscar uma relação entre o ângulo do triângulo de vértice *A* e as dimensões de suas arestas. Precisamos, então, relacionar os valores: $||u-v||$, $||u||$, $||v||$ e $\langle u, v\rangle$. Mas isto já foi feito. Já vimos que $||u-v||^2 = ||u||^2 - 2\langle u, v\rangle + ||v||^2$. Fazendo $||u|| = c$, $||v|| = b$, e $||u-v|| = a$ e usando

$\langle u, v\rangle = ||u||.||v||.\cos(\hat{A})$

temos que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos(\hat{A})$$

a conhecida lei dos cossenos.

Exemplo: Seja $P = (1,3)$ e r a reta dada pela equação $x - y = 1$. Vamos determinar a distância entre P e r. Olhando um desenho representando a situação, a estratégia para determinar a distância deve ser bem clara. A distância entre P e r é a distância entre P e o ponto interseção de r com a reta perpendicular a r e contendo P.

Pegando dois pontos de r e fazendo a diferença temos um vetor paralelo a r, por exemplo $u = (1,1) = (1,0) - (0,-1)$. Então, usando a relação $u \perp v \Leftrightarrow \langle u, v\rangle = 0$, vemos que $v = (1,-1)$ é um vetor perpendicular a reta r. Os pontos da reta s, perpendicular a r e passando por P, satisfazem a equação $Q = P + t.v = (1+t, 3-t)$. Basta encontrar $t \in$ R tal que Q $\in r$. Substituindo na equação de r, segue que $t = 3/2$, donde $Q = (5/2, 3/2)$. Assim,

$$d(P,r) = d(P,Q) = 3/2.\sqrt{2}$$

C

$u - v$

v

B

u

A

Observação: A solução deste último exemplo é uma seqüência de pequenas contas. É claro que se você já sabe a fórmula da distância que é deduzida nos textos de geometria analítica, a solução fica bem mais fácil. Mas isto somente se já se sabe a fórmula. A nossa solução possui ainda uma curiosidade. Provavelmente uma solução através da geometria analítica seria bem mais natural. Neste caso, calcula-se a reta perpendicular usando a relação bastante conhecida entre os coeficientes, $m_2 = -1/m_1$, e depois Q é determinado fazendo a interseção das retas. Só que tem um detalhe, se o mesmo problema fosse colocado no espaço, isto é, no R^3, então a solução analítica não serviria, enquanto que a solução vetorial seria exatamente a mesma.

Assim, estes dois exemplos servem para ilustrar o poder de dedução que esta teoria tem. Manipulando algumas poucas propriedades de forma algébrica, e às vezes até de modo despretensioso, podemos deduzir naturalmente os fatos desejados. Normalmente não precisamos nos preocupar com grandes fórmulas. Esta é mais uma vantagem desta teoria algébrica.

Observação: Na seção anterior vimos como provar um resultado sobre um triângulo retângulo inscrito num círculo. O leitor pode pesquisar como seria a solução geométrica e depois perceber o seguinte: A solução geométrica pede uma passagem criativa, colocando o triângulo como parte de paralelogramo que forçosamente será um retângulo (mais o conhecimento de vários fatos geométricos). A solução analítica não exige nenhuma criatividade, a conta realizada é a conta que o problema pede. Podemos dizer que, de certa forma, é uma solução mais honesta. Esta pode ser uma questão bastante relevante, no que diz respeito ao ensino da matéria, a ser considerada. No contexto de vetores nosso problema sobre o retângulo fica mais interessante ainda. No caso, a solução fica:

Roteiro: *ABC* é retângulo

$\langle CA, CB \rangle = 0$. Desenvolvimento: Como

$\langle CA, CB \rangle = \langle (-r-x,-y),(r-x,-y) \rangle = (-r-x).(r-x) + y^2 = -r^2 + x^2 + y^2 = 0$,

concluímos que *ABC* é retângulo. (Repare na economia de conta e como o roteiro para começar a solução é bastante claro e natural.)

Estamos vendo como a teoria de vetores pode ser útil nos problemas de geometria. O espírito é reescrever o problema geométrico numa linguagem de vetores. Por exemplo, como podemos ver que as diagonais de um losango são perpendiculares? Um losango é um paralelogramo com lados de mesma medida. Em termos de vetores, estamos falando da figura gerada a partir de dois vetores, u e v, de mesmo comprimento, isto é, $||u|| = ||v||$. As diagonais do paralelogramo são obtidas a partir dos vetores $u + v$ e $u - v$. Para verificarmos que as diagonais são ortogonais precisamos mostrar que $\langle u + v, u - v \rangle = 0$. E, de fato,

$\langle u + v, u - v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, -v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, -v \rangle = ||u||^2 - \langle u, v \rangle + \langle u, v \rangle + ||v||^2 = 0$.

O leitor está convidado a resolver os seguintes exercícios de geometria e geometria analítica. Todos podem ser resolvidos com o material aqui apresentado.

1) As diagonais de um losango são bissetrizes de seus ângulos.

2) As diagonais de um paralelogramo se encontram em seus pontos médios.

3) Os pontos médios dos lados de um quadrilátero determinam um paralelogramo.

4) Se as diagonais de um paralelogramo têm o mesmo comprimento, então o paralelogramo é um retângulo.

5) Encontrar a bissetriz das retas dadas pelas equações $y = 4/3x$ e $y = 1/3x$.

6) Calcular a área do triângulo de vértices (1,1),(4,2) e (3,5).

7) Sendo M = (-1,0), N = (1,1) e P = (2,1) os pontos médios dos lados de um triângulo, calcular os vértices.

8) A figura abaixo é um paralelogramo. Determine o ângulo θ .

O estudo da álgebra linear

No início do artigo, falei sobre uma possível ligação do estudo da geometria analítica e da álgebra linear. Vejamos então algumas questões relacionadas à aprendizagem.

Apesar do objeto ser o mesmo, os estudos do R^2 como modelo de geometria e como modelo de espaço vetorial são totalmente distintos. Este é um primeiro fato que deve ficar claro.

No segundo modelo, os principais conceitos da álgebra linear são abordados, mas com uma diferença sutil e bastante significativa. As definições e apresentações das principais propriedades são construtivas, ao contrário do estudo abstrato de espaço vetorial que apresenta suas definições de modo axiomático. Contudo, nosso estudo do R^2 é axiomático, pois, apesar de estudarmos um modelo, isto é, um exemplo particular, damos ênfase ao estudo dedutivo a partir de algumas propriedades básicas, evitando fazer referência às coordenadas, isto é, aos objetos do exemplo.

O próximo passo natural deste estudo seria repetir todas as definições para o R^3, isto é, apresentar o R^3 como outro modelo de espaço vetorial. Nesta seqüência, o método dedutivo da álgebra seria muito valorizado, pois os resultados seriam obtidos exatamente da mesma maneira que para o modelo R^2.

Por exemplo, depois de definir o produto interno em R^3 seria preciso provar, usando a definição, e, portanto, usando coordenadas, as propriedades i) – v), apresentadas na seção anterior. Mas, depois, a verificação de propriedades como: $\langle u, v \rangle = 0$, se, e somente se, $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$, seria exatamente a mesma que no caso R^2, pois não fizemos uso de coordenadas, mas somente das propriedades. Outro exemplo: na geometria analítica a descrição da reta do plano é bem diferente da reta do espaço. Já na álgebra linear, as expressões, tanto para R^2 como para R^3, são exatamente a mesma: $P = A + tv,\ t \in R$.

Outra questão: o estudo da álgebra linear, propriamente, começa com uma apresentação maçante sobre sistemas e matrizes. Num estudo do R^2 e R^3 os sistemas aparecem naturalmente e sem a necessidade de uma teoria específica. Contudo, principalmente no caso do R^3, o estudante já começa perceber a importância deste estudo. Aí sim, deve começar a fazer sentido um desenvolvimento exaustivo da teoria de sistemas e matrizes.

Mais outra questão: um dos maiores objetivos do estudo de uma teoria é aplicá-la. No texto vimos várias aplicações na geometria. Mas não é só isto. Na seqüência de estudo da graduação, um aluno que tem que estudar álgebra linear, não necessariamente da matemática, normalmente também tem que estudar física. O conjunto R^3 com a linguagem vetorial é o modelo matemático que o físico precisa para apresentar conceitos como velocidade e aceleração de uma partícula, ou trabalho realizado por uma força. Quando o estudo da álgebra linear começa do geral, os exemplos concretos ficam muito distantes e a manipulação de casos como o R^3 não é suficientemente trabalhada. Com isso, no momento que o aluno mais precisa da teoria de vetores do espaço para traduzir e modelar os problemas da física, ele ainda está com a cabeça confusa, tentando dividir noções como base e dependência linear entre espaços de matrizes, polinômios e funções, e ainda definições artificiais de soma e produto para R^3, etc. Inclusive, parece um contra-senso um aluno estudar o modelo matemático para os problemas vetoriais da natureza, a álgebra linear, e não saber aplicá-lo no curso de física.

Última questão: não comentamos sobre as transformações lineares por falta de espaço, mas estas poderiam ser apresentadas dentro da mesma ótica. Num estudo exaustivo da álgebra linear para o R^2 e R^3, há tempo para se desenvolver os conceitos relacionados com as transformações lineares, estudar os exemplos mais importantes como projeção, reflexão e rotação, e ilustrar os conceitos com várias aplicações na geometria e na física.

A organização deste texto foi feita para dar uma idéia (e sugestão) de como se poderia desenvolver um estudo preliminar à álgebra linear e que realmente ajudasse no entendimento de seus conceitos abstratos. Esta postura é semelhante à adotada quando se ensina geometria analítica e os modelos plano de Poincaré e esfera de Riemann antes da geometria axiomática, ou o cálculo antes da análise.

Este texto também pode ser uma orientação para o ensino médio. O professor quando tiver como objetivo preparar seu aluno para a Universidade ou simplesmente para o vestibular, deve pensar nos conceitos que o aluno precisará ou então nos tipos de questões que precisará resolver. Como o R^2 faz parte do programa, uma introdução ao estudo vetorial do R^2 pode ser vantajoso para o aluno, inclusive para valorizar o estudo da física, além da oportunidade de aprender a resolver questões relacionadas a geometria e geometria analítica usando uma quantidade bem menor de fórmulas.

Comentários Finais

Resumindo, no estudo vetorial do R^2, vimos a eficiência deste estudo na hora de deduzir fórmulas (ou propriedades) geométricas, ou na resolução de problemas sem fazer uso de fórmulas mais específicas. Outra característica mostrada foi a forma concisa e clara como as soluções são apresentadas (e escritas), conseqüência do uso de variáveis e propriedades algébricas, em vez de coordenadas. Na verdade estas características são conseqüências da "força" desta teoria.

O leitor pode observar bem a diferença entre o uso e não uso da linguagem vetorial comparando as definições de derivada parcial e direcional apresentadas nos livros clássicos de cálculo com as definições do livro [Li], por exemplo.

Uma outra grande vantagem que se extrai deste estudo é o seu poder de generalização. Em função da forma dedutiva apresentada, um novo estudo vetorial para o R^3, por exemplo, é quase que simples repetição. E o mesmo acontece quando se estudam matrizes, polinômios, funções e etc.

Apesar de tantas vantagens, este estudo de características abstratas recebe muitas críticas, e com razão. Alega-se que os conceitos são abstratos e sutis demais. Por exemplo, o desenvolvimento de fórmulas como $||u + v||^2 = ||u||^2 + 2\langle u , v\rangle + ||v||^2$ pode parecer um monte de manipulação matemática sem sentido nenhum. Ainda assim, será que estas considerações representam realmente um problema? Não acho incomum encontrar pessoas que gostam de trabalhar com o desconhecido ou com o incompreensível, principalmente quando associado com aplicações. Mesmo que no final o aluno trabalhe em alguns momentos de forma mecânica, continuo não vendo problema. Afinal, a graça da álgebra é exatamente isto, permitir fazer contas mesmo sem compreender muito bem os objetos em questão. Por exemplo, até no doutorado, pode-se ver alunos que aprendem a utilizar determinadas técnicas, conseguir resultados relevantes para defender como tese, mesmo não tendo domínio, ou consciência, pleno do assunto que está lidando. Além disso, mesmo que estas desvantagens sejam reconhecidas, vemos que este estudo ainda dá a oportunidade de fazer geometria ao aluno que não tem afinidade ou que não gosta do estudo geométrico, ou até que não teve a intuição geométrica adequadamente desenvolvida.

Mais uma outra diferença marcante do estudo desenvolvido aqui é a maneira como as soluções aparecem, mecânicas e naturais, ao contrário das soluções geométricas que são criativas e normalmente admitem várias possibilidades. Por trabalharem com a criatividade do estudante e não terem um método preciso, estudos geométricos podem, dependendo dos objetivos, se tornar cansativos e menos eficientes. O teorema sobre o triângulo retângulo inscrito num círculo que provamos no texto pode ser um bom exemplo desta diferença.

Para compensar a apresentação abstrata deste estudo vetorial, é possível desenvolver um laboratório para aplicar e testar os conhecimentos da teoria. Consideremos o seguinte exemplo. O computador é uma excelente ferramenta para se trabalhar imagens. Acredito que quase todo mundo pelo menos aprecia a computação gráfica. Esta pode ser uma proposta de trabalho para alunos do ensino médio bastante viável. Para isto, é preciso um computador qualquer (qualquer mesmo, a versão mais antiga que se tiver, 486, 386, 286 ou até XT, comprada mesmo em ferro velho, serve para este trabalho), e uma linguagem de programação, o Pascal, por exemplo. Com pouquíssimo conhecimento da linguagem e a nossa teoria para o R^2, podemos usar a tela do computador como um laboratório, onde aplicamos todas as fórmulas, e suas interpretações geométricas, na construção de imagens na tela.

Só mais uma observação. É mais comum apresentarmos uma teoria e depois aplicá-la nos variados modelos como ilustração. Aqui podemos inverter esta seqüência. Vimos o R^2 como um modelo de geometria e como modelo de espaço vetorial. Tendo o mesmo exemplo, podemos comparar as teorias e perceber suas diferenças, vantagens e desvantagens, ou momentos onde uma é mais vantajosa que a outra (nem sempre a solução vetorial é melhor que a analítica, ou a geométrica). No caso, este exemplo do R^2 é muito rico. Ele ainda pode ser visto como modelo de uma outra teoria, conjunto de números. Neste contexto, o R^2 é conhecido como o conjunto dos números complexos. Suas aplicações são inúmeras. O leitor pode tentar fazer um levantamento de problemas de geometria cuja solução pode ser consequência da teoria dos números complexos.

Bibliografia

Lima, E. L. – Coordenadas no Plano. Sociedade Brasileira de Matemática.

[Li] Lima, E. L. – Curso de Análise, Vol. 2. Projeto Euclides.

[Mi] Millman, R. S. – Geomatry, A Metric Approach With Models. Ed. Springer-Verlag.

dos Santos, N. M. – Vetores e Matrizes. LTC Ed. s.a.

Fainguelernt, E. K.e Bordinhão, N. de C. – Álgebra Linear e Geometria Analítica. Ed. Moderna.