Qual o tamanho do infinito?

Paulo Gusmão

May 24, 2011

1 Introdução

Fascinante seria especular sobre a origem da noção de infinito no espírito humano. Teria algo a ver com a percepção da finitude da vida diante do tempo? A percepção da imensidão que nos separa das estrelas? A visão do horizonte como algo inatingível? Existem tribos que só sabem contar até dez. Possuem elas a noção de um infinito? A eternidade dos espíritos por exemplo!? Não estariam todas essas possíveis origens ligadas ao sentimento primeiro do tempo como uma sucessão de eventos? Se assim o é, o que impede que essa noção se estenda ao processo de contagem? Fato é que em algum momento da história da humanidade, o infinito irrompeu o universo da matemática se revelando, ao mesmo tempo, alicerce para seu desenvolvimento e fonte de problemas filosóficos ainda sem soluções.

Se pedirmos a uma criança um exemplo de conjunto infinito, provavelmente o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...\}$ seria o escolhido. Se pensarmos que os rudimentos do processo de contagem na história do homem datam do paleolítico, portanto há 15.000 anos, e que o conjunto acima, chamado *conjunto dos números naturais*, é oriundo do desenvolvimento desse processo de contagem, parece razoável dizer que de natural ele não tem nada, embora hoje ele nos seja completamente familiar. É comum vermos, após o primeiro contato com os naturais, crianças disputando entre si a capacidade de dizer números gigantescos onde os termos utilizados são os mais bizarros; não estaria nesse ato a tentativa de aprisionar o infinito dos naturais, dada a incapacidade do espírito de concebê-lo em sua totalidade? Na verdade, esta incapacidade se revela mesmo no finitamente grande. Trabalhando no interior do universo finito da matemática, somos capazes de produzir números tão gigantescos que qualquer pessoa se sentiria confusa somente na tentativa de concebê-los em sua representação decimal. Um exemplo é a constução abaixo, devida ao matemático polonês Hugo Steinhauss e ao matemático canadense Leo Moser. Coloquemos a $= a^a$, isto é, 2 $= 2^2$, coloquemos b $= b$ com um número de triângulos em volta igual a b, por exemplo $2 = 2 = 4 = 4^4 = 256$; coloquemos c $= c$ com um número de quadrados em volta igual a c. Definimos agora um *mega* como $=$ $2 = 2 = 256 = 256$ com 256 triângulos em volta, isto é, 256^{256} com 255 triângulos em volta, ou ainda, $(256^{256})^{256^{256}}$ com 254 triângulos em volta. Não se contentando com esses números absurdamente grandes, Moser continua o esquema com hexágonos, heptágonos etc. O que podemos dizer da existência desses números quando não nos é sequer possível concebê-los? É fato que essa existência não coloca qualquer problema para o matemático profissional, mas podemos realmente dizer alguma coisa a respeito desse número a não ser o fato de corresponder a uma enorme potência de 2? Nos é mesmo impossível, por exemplo, conceber seu sucessor imediato!!

Parece então que o infinito nos é dado como um todo sem que, entretanto, esse todo seja composto de partes. Esse conceito de infinito, chamado de infinito atual, revoltava Poincaré, que dizia: “Quando eu falo de todos os números inteiros, eu quero dizer todos os números que nós inventamos e todos aqueles que poderemos inventar um dia. Quando eu falo de todos os pontos do espaço, eu quero dizer todos os pontos cujas coordenadas são expressas por números racionais, ou por números algébricos, ou por integrais, ou por toda outra maneira que poderemos inventar. É esse *nós poderemos* que é o infinito”[1]. Para ele, portanto, o infinito existe em potencial. Contrariamente, ultrapassando de longe Leibnitz com seu infinito atual(metafísico), Couturat não somente dava à matemática o direito de citar mas dava predominância ao infinito atual. Ele dizia: “Os matemáticos podem e sabem se dar tanto grandezas infinitas como finitas e isso porque eles (matemáticos) se dão na sua totalidade. Se eu escrevo:

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots ,$$

2 representa uma grandeza divisível ao infinito contendo todas as suas partes integrantes. A igualdade é imperfeita ou simbólica do ponto de vista

[1] Dernières Pensées, p. 131

numérico, mas perfeita do ponto de vista geométrico e analítico"[2]. O que vemos aqui é que, para Couturat, o lado esquerdo da igualdade representa a totalidade, o absoluto, mas as partes que o constituem (o lado direito) é a imperfeição. Ele estabelece uma hierarquia onde coloca a grandeza, concebida em sua totalidade, acima do número, que seria um procedimento imperfeito para analisar a grandeza. O debate está longe de terminar e vale dizer que, com os trabalhos de Cantor sobre os transfinitos, surgiram outras correntes para acirrar a discussão.

Pode parecer que estas discussões são recentes, entretanto a história revelou ser o infinito o lugar em que se escondem muitas coisas estranhas e paradoxais. Entre os vários paradoxos envolvendo o infinito o mais conhecido é o paradoxo de Zenão (séculoIII a.C.) sobre Aquiles e a tartaruga. Este paradoxo afirma que Aquiles não pode alcançar a tartaruga, pois deve, em primeiro lugar, chegar ao ponto do qual a tartaruga acabou de sair, e, portanto, a tartaruga estará sempre à frente.

Fato é que, apesar dos embates ainda sem solução, os matemáticos trabalham com o infinito como sendo um ente dotado de existência[3] . Operamos com ele, o exploramos, tentamos compreendê-lo. Não seria isso um ato de fé? Em que medida se difere do crente que, admitindo a priori a existência de Deus, parte em sua busca e compreensão? Em *Introduction to set Theory*, de Hrbacek e Jech, lemos:

"Axioma da Infinidade: Existe um conjunto indutivo(isto é, infinito)"

Quando os matemáticos dizem que os axiomas em matemática devem ser senão auto-evidentes mas pelo menos passíveis de um consenso sobre os termos primitivos que os constituem, parece que neste caso estamos num impasse!!

O que pretendemos neste texto é colocar o leitor em contato com o infinito (ou os infinitos?) matemático admitindo tal axioma. Pode parecer contraditório, a partir da discussão acima, mas não: essa opção não provém da negligência da importância de uma busca de fundamentação do conceito, mas sim da inquestionável beleza estética e riqueza oriundas da reflexão humana ao se admitir o axioma do infinito. É verdade que a partir dos anos 30

[2]De l'infini mathématique, Alcan éd., 1896

[3]o conceito de exitência aqui, não é o mesmo daquele utilizado com respeito aos objetos de nosso dia a dia. Não discutiremos aqui o modo de existência do conceito de infinito para os matemáticos

as discussões sobre a natureza do infinito matemático se esvaziaram, muito provavelmente em função dessa fecundidade. Seria esta uma atitute meramente pragmática?

2 Sobre conjuntos finitos

Iniciemos falando de algumas propriedades simples dos conjuntos finitos: imaginemos que a humanidade não é dotada da capacidade de contar e que, há um bar onde o cliente só é admitido se houver para ele uma cadeira disponível. Numa noite de bom movimento, o proprietário quer saber se a casa está com sua capacidade esgotada. Admitindo-se que as pessoas não ficam sentadas todo o tempo, como fazer para obter tal informação se ele não sabe contar? Ora, basta para isso que ele peça para que todos se sentem e em seguida observe se sobrou alguma cadeira vazia. Observamos assim que embora o proprietário não saiba contar ele conseguiu, por esse processo de associação (cliente$\leftrightarrow$ cadeira), identificar se o conjunto de cadeiras tem ou não o mesmo tamanho que o conjunto de clientes (se existe ou não um cliente para cada cadeira). Digamos que o tamanho dos dois conjuntos seja o mesmo (dizemos, neste caso, que os dois conjuntos estão em correspondência *um a um*) e que num dado momento os clientes de uma das mesas pediram a conta, pagaram e foram embora. Os clientes que restaram formam um subconjunto do conjunto inicial, evidentemente de menor tamanho, uma vez que existem agora cadeiras vazias. Notem que o que fizemos é adotar o conjunto de cadeiras como conjunto referência para determinar o tamanho do conjunto de clientes, e acabamos de mostrar que, dado um conjunto finito qualquer (no nosso caso, o conjunto de clientes) toda parte (i.e todo subconjunto) tem menos elementos que o todo. Admitindo-se agora que o proprietário, nesse dia, após constatar a lotação da casa, permitiu que mais pessoas entrassem no recinto, fica evidente que o tamanho do conjunto de clientes aumentou, visto que o número de cadeiras tornou-se insuficiente, ou seja, o tamanho de um conjunto finito qualquer aumenta ao adicionarmos elementos.

Até agora o que temos dito é bastante óbvio e pode parecer mesmo ingênuo abordarmos tal assunto. Na verdade, a evidência das propriedades de conjuntos finitos descritas acima vem do fato de estarmos impregnados das experiências cotidianas que, desde pequenos, nos colocam em contato com um " mundo finito" onde, mesmo antes de aprendermos a contar, fazemos associações, correspondências, agrupamentos de objetos.

Note que até o momento não falamos em quantidade de elementos de um conjunto, mesmo porque não sabemos contar, lembram-se? Se soubéssemos e observássemos com um pouco de atenção, veríamos que o processo de contagem de um conjunto, digamos, com n elementos, nada mais é que um processo de correspondência entre os elementos desse conjunto e o conjunto $\{1, 2, ..., n\}$. O fato do símbolo n representar uma quantidade provém de uma estrutura adicional introduzida; quando consideramos um conjunto de elementos de mesma espécie, mas distintos, como uma reunião de pessoas, temos imediatamente a idéia de unidade e, conseqüentemente, a de uma coleção de unidades. Associamos à idéia de unidade, o símbolo 1. Ao reunirmos uma pessoa do conjunto com uma outra, representamos tal ato pelo símbolo $1 + 1$ que convencionou-se denotar pelo símbolo 2, e assim por diante, ou seja, n representa uma quantidade por ser um acúmulo sucessivo de unidades. Portanto, se voltarmos à nossa situação original, em que não sabemos contar, e se temos uma correspondência um a um entre um determinado conjunto e o conjunto $\{1, 2, ..., n\}$, o máximo que podemos dizer é que eles têm o mesmo tamanho; não cabe falar em número de elementos dos conjuntos pois esse processo de quantificar não é, por nós, conhecido. Isso pode nos parecer a princípio não muito útil, pois, em se tratando de conjuntos finitos, estamos interessados em geral, em determinar a quantidade de elementos. Entretanto, ao tratarmos de conjuntos infinitos, esta noção de quantidade de elementos se perde, pois o processo de contagem levaria um tempo infinito.

Assim, o que nos interessa é estabelecer a existência de um ou mais infinitos, a partir do conceito *tamanho*, isto é, partindo de um conjunto infinito como referência, e dado um outro conjunto infinito, será que podemos estabelecer uma correspondência um a um entre esses dois conjuntos? Se a resposta é sim, significa que eles têm o mesmo tamanho, caso contrário concluímos que existem infinitos de tamanhos distintos e, portanto, mais de um infinito.

3 Conhecemos o infinito?

O conjunto infinito que adotaremos como referência no momento é o chamado conjunto dos números Naturais, representado por $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ que é obtido fazendo-se indefinidamente o processo *"acúmulo sucessivo de unidades"*. Vamos agora mostrar algumas propriedades desse conjunto. O exemplo que utilizaremos aqui é conhecido como *Hotel de Hilbert*. David Hilbert (1862-1843), matemático alemão, foi professor em Königsberg, sua cidade natal e depois em Göttingen de 1895-1929. Ele foi incontestavelmente o chefe da escola matemática alemã do primeiro terço do século XX. Em 1925, numa conferência proferida no encontro da Sociedade de matemática de Westphalie em memória a Weierstrass, Hilbert formula claramente o conjunto de suas concepções sobre os fundamentos da matemática. Nessa conferência intitulada *sur l'infini* ele utiliza o modelo do hotel que exploraremos no que segue, para chamar a atenção sobre algumas sutilezas do conceito de infinito na matemática.

Imaginem um hotel com uma infinidade de quartos dispostos horizontalmente, um ao lado do outro e numerados a partir da porta de entrada do hotel com os elementos (e na ordem) do conjunto $\mathbb{N}$. Num feriado prolongado, o gerente se viu felizmente com o hotel lotado. Para sua surpresa, adentrou a recepção um senhor desejoso de um quarto para se hospedar. O gerente relatou a situação, mas sem sucesso: o digníssimo queria porque queria um quarto. Não sabendo como dar solução ao problema ora instalado, resolveu buscar ajuda com um dos hóspedes, que por acaso era matemático. O hóspede sem hesitar, lhe disse: Não há problema algum, encontraremos um quarto para o senhor. O gerente, não acreditando no que havia ouvido, imediatamente interpelou: Mas como? Eu não lhe disse que o hotel está com lotação esgotada?! Calmamente, o matemático perguntou: O seu sistema de interfone para os quartos trabalha simultaneamente, ou seja, você pode se comunicar com todos os quartos ao mesmo tempo? Sim, respondeu o gerente, ainda que intrigado. Bem, meu caro, então interfone para todos os hóspedes simultaneamente e peça a cada um que, ao toque do sinal, se mude para o quarto ao lado na ordem crescente de numeração. Neste momento, o gerente entendeu e se deu conta do quão simples era a solução do problema. Como o hóspede do quarto número 1 se mudaria para o 2, o do quarto 2 para o 3 e assim sucessivamente, o quarto número 1 ficaria vago para hospedar o senhor que havia chegado (ver **figura 1**).

Após se dar conta disso, o gerente, ainda intrigado, perguntou ao matemático: Por que a necessidade do sistema de interfone simultâneo? Ora, meu caro, é necessário apenas por uma questão de tempo. Se o senhor tivesse que dar o sinal de mudança quarto por quarto, levaria um tempo infinito para fazê-lo, o que inviabilizaria a operação.

Resolvido o problema, eis que chega nas dependências do hotel um grupo de cinco pessoas à procura de hospedagem. Nesse momento, tendo o gerente já compreendido a idéia, imediatamente interfonou para todos os quartos solicitando que, ao toque do sinal, cada hóspede se deslocasse cinco quartos adiante do seu, na ordem crescente de numeração. Dessa maneira os quartos de números 1 ao 5 ficaram vagos, podendo portanto ser ocupados pelos recém chegados (ver **figura 2**).

Desgostosos com esses deslocamentos sucessivos, os hóspedes dos quartos de números 50 ao 54 decidiram partir. Apesar da tentativa insistente do gerente de dissuadi-los de tal decisão, ele viu-se com cinco quartos vagos e arrependido. Como iria agora explicar ao dono do hotel que, por conta de querer hospedar mais pessoas, havia perdido cinco hóspedes? Ele não tinha argumentos para fazê-lo a não ser o de prestar bons serviços, o que não era suficiente pois, ao hospedar mais cinco pessoas, nem sequer conseguiu aumentar o faturamento do hotel, visto que o número de quartos ocupados permanecia o mesmo. Agora, pensou ele, estou com cinco quartos desocupados e meu faturamento diminuído em cinco diárias. De repente, como que de um estalo, ele pensou: Se posso acrescentar hóspedes sem alterar meu faturamento, devo poder tabém perdê-los sem alterar meu faturamento?! Interfonou simultaneamente aos quartos de números 55 em diante e solicitou que, ao sinal, cada um retornasse 5 quartos. Dessa maneira conseguiu que seu hotel se encontrasse de novo com lotação esgotada, mantendo seu faturamento inicial (ver **figura 3**).

As figuras acima representam, em cada caso, as correspondências *um a um* que garantem que, em se tratando de conjuntos infinitos, acrescentar ou retirar uma quantidade finita de elementos não altera o tamanho do conjunto, fato que se revelou falso no caso de conjuntos finitos.

4 Cabe mais infinito no infinito?

Mais calmo agora, por ter resolvido todos os problemas, o gerente foi se ocupar de alguns detalhes referentes à compra e estoque de alimentos para poder dar conta das refeições de toda aquela gente. O cardápio do almoço seria carne seca com abóbora e, de sobremesa, doce de mamão. Nesse momento, ele já não se inquietava mais com a chegada ou saída de hóspedes, nem no que diz respeito às refeições pois, em qualquer dos dois casos, o número infinito de refeições preparadas seria exatamente o necessário e suficiente e daria conta de qualquer das duas situações caso se apresentassem, bastando para isso fazer as mesmas correspondências acima, só que desta vez entre hóspedes e refeições. Como nem tudo é festa num hotel com uma infinidade de quartos, o gerente é chamado com urgência à recepção por uma recepcionista que, embora tendo acompanhado de perto todo o desenrolar dos fatos, estava a ponto de ter um ataque de nervos. Gaguejando e muito pálida, ela informou que acabara de receber um telefonema do dono do hotel, dizendo que estava para chegar o ônibus do hotel, com um número infinito de lugares, completamente lotado de amigos seus, pessoas da mais alta estirpe, e que ele exigia a hospedagem dos mesmos, nem que para isso fosse necessário esvaziar o hotel. Esvaziar o hotel?? Bradou o gerente descontrolado, esse cara deve estar louco!!! Imagine você, falou ele à recepcionista, já não perturbei o suficiente os pobres coitados? Ora é: Senhores hóspedes andem dez quartos adiante, ora é: Senhores hóspedes, andem cinco para trás. Agora ele quer o quê? Que eu diga: Senhores hóspedes façam suas malas e, ao sinal, dirijam-se ao ônibus que acaba de chegar para levá-los todos embora? Já tive muito problema com hóspedes, até tomei na cara, mas sempre foi com um número finito deles. Apanhar de um número infinito é algo pelo qual não pretendo passar!!! Ligue para ele de volta e diga que estou me demitindo e, se quiser, que venha ele mesmo resolver o problema. A recepcionista, desesperada com a situação, tentou acalmá-lo e sugeriu que antes de qualquer decisão mais radical, ele contactasse o tal hóspede matemático, quem sabe ele teria uma solução miraculosa? E assim foi feito. Ao chegar à recepção e tomar ciência da situação, e vendo o estado de desespero dos dois, o matemático desandou a rir, rir e rir, até que por fim conseguiu respirar e compenetrado falou: Eu tenho a solução. Não acreditando, os dois, gerente e recepcionista, sentaram-se para ouvir o que o matemático tinha a dizer: Interfone para os quartos e diga aos hóspedes que, ao sinal, cada um se desloque para o quarto cujo número é o dobro daquele em que está hospedado. Desta maneira, o hóspede do quarto número 1 irá para o 2, o do número 2 irá para o 4, o do 3 para o 6 e assim por diante, enfim, o hóspede do quarto de número n, qualquer, irá para o de número $2n$. Notem que, após esta operação, os quartos de número ímpar ficarão vagos e agora você poderá hospedar todos que chegaram. O gerente ainda sem entender, perguntou: Como vou fazer isso se só terei os quartos ímpares vagos enquanto que o ônibus está lotado? Ora, respondeu o matemático, você não acabou de ver que todos os seus hóspedes, que antes lotavam o hotel, podem ocupar somente os quartos de número par? Da mesma maneira, os novos que chegarem poderão ser todos alocados nos quartos de número ímpar, bastando para isso que você coloque o primeiro no quarto de número 1, o segundo no de número 3, o terceiro no de número 5 e assim por diante, enfim o novo hóspede de número n irá para o quarto de número $2n - 1$.

O que acabamos de ver é que o conjunto dos números naturais tem o mesmo tamanho que uma de suas partes, no caso, tanto do conjunto dos números pares como do conjunto dos números ímpares (ver **figura 4**). Estranho, né? O fato é que existem tantos pares quanto números naturais, embora o primeiro seja um subconjunto do segundo.

Voltando ao feriado no hotel de Hilbert, o gerente estava completamente impressionado com a solução proposta pelo matemático, ao mesmo tempo que irritado, pois a chegada daquela infinidade de pessoas não alterava em nada o seu faturamento (ele continuava com a lotação esgotada), embora a cada nova situação mais trabalho se apresentasse. Por outro lado, para seu conforto, ele não precisaria mexer em nada no que diz respeito às refeições, a esta altura todas prontas para serem servidas. Algo ainda o intrigava, a saber, como fazer a operação de hospedagem dos recém chegados em tempo finito? Sim, porque deslocar os hóspedes do hotel para os quartos de número par em tempo finito não é problema, o problema é hospedar os novos, nos quartos de número ímpar em tempo finito. Indagado, o matemático revelou que havia sido na verdade consultor na elaboração do projeto e serviços a serem prestados, quando da construção do hotel, e que havia previsto tal situação. Ele, na ocasião, solicitara que cada quarto tivesse uma porta de fundos para o estacionamento e que os ônibus do hotel tivessem uma só fileira infinita de poltronas, cuja distância entre duas quaisquer delas, subseqüentes uma da outra, fosse exatamente a distância entre as portas de dois quaisquer quartos subseqüentes e que, além disso, cada poltrona fosse dotada de uma porta lateral de saída. Não é dificil ver que os novos hóspedes poderiam agora ser alojados em tempo finito bastando para isso fazer a mesma operação $n \to 2n-1$ entre os passageiros (assim, somente as poltronas ímpares estariam ocupadas) e em seguida estacionar o ônibus nos fundos do hotel, de maneira que cada porta de saída ficasse exatamente em frente àquela do quarto de mesma numeração.

Com o objetivo de não mais incomodar o matemático durante o feriado, o gerente decidiu interpelá-lo a respeito de um problema que, caso se apresentasse de novo, ele não saberia resolvê-lo. Caro senhor, disse ele, caso cheguem agora dois, três, quatro ou um número finito n qualquer de ônibus, com uma infinidade de lugares cada um, percebo que fazendo a operação que acabamos de executar, repetidas vezes, consigo, sem problemas, alojar todos os novos hóspedes. Pergunto ao senhor: Poderia eu, nesta dada situação, alojar todos os hóspedes dos n ônibus numa só tacada, isto é, sem fazer n vezes a operação feita agora pouco? Sem dúvida, respondeu o matemático. Primeiramente, saiba que, por questões de organização, cada passageiro de cada ônibus possui um crachá indicando a qual ônibus ele pertence e qual poltrona ocupa. Assim, digamos, o passageiro do ônibus de número 5 ocupando a poltrona de número 3 possui um crachá onde está escrito seu nome e o símbolo $p_{5,3}$ (passageiro 5,3); aquele do ônibus de número 7 ocupando a poltrona de número 35 terá no crachá, além do seu nome, o símbolo $p_{7,35}$ e assim por diante. Além disso, observe que as vagas dos ônibus são dispostas como numa rodoviária, isto é, uma ao lado da outra. Sabendo disso, peça que, ao sinal, todos os passageiros desçam do seu ônibus pela respectiva porta ao lado de sua poltrona e que, feito isso, todos os ônibus se retirem do local, exceto o primeiro. Observe que os passageiros com suas indicações no crachá ficarão dispostos da maneira mostrada abaixo:

$$
\begin{array}{ccccc}
p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} & p_{1,4} & \cdots \\
p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} & p_{2,4} & \cdots \\
p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} & p_{3,4} & \cdots \\
\ldots.. & \ldots.. & \ldots.. & \ldots.. & \cdots \\
p_{n,1} & p_{n,2} & p_{n,3} & p_{n,4} & \cdots
\end{array}
$$

onde a primeira fila é formada pelos passageiros do ônibus número 1, a segunda pelos passageiros do ônibus número 2 e assim por diante. Note que como o ônibus de número 1 está parado diante da primeira fila, disse o matemático, basta agora que dotemos cada passageiro de um número ímpar e que, ao sinal, ele ocupe a respectiva poltrona no ônibus ali parado. O que você não sabe é que, já tendo sido isso por mim previsto, solicitei que os crachás tivessem no seu verso uma numeração feita da seguinte maneira: o passageiro $p_{1,1}$ com o número 1, o $p_{1,2}$ com o número 3, passageiro $p_{2,1}$ com o número 5, o passageiro $p_{3,1}$ com o número 7 e assim em diante, seguindo a direção das setas indicadas abaixo.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
p_{1,1} & \rightarrow & p_{1,2} & & p_{1,3} & \rightarrow & p_{1,4} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
p_{2,1} & & p_{2,2} & & p_{2,3} & & p_{2,4} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & \\
p_{3,1} & & p_{3,2} & & p_{3,3} & & p_{3,4} & & \cdots \\
 & \swarrow & & & & & & & \\
\ldots\ldots & & \ldots\ldots & & \ldots\ldots & & \ldots\ldots & & \cdots \\
p_{n,1} & & p_{n,2} & & p_{n,3} & & p_{n,4} & & \cdots
\end{array}
$$

É claro agora que, com todas as poltronas ímpares ocupadas, basta que o ônibus estacione nos fundos do hotel, visto que os quartos de número ímpar já estão vagos via o procedimento *"hóspede do quarto de número n desloca-se para o quarto de número $2n$"*.

O gerente, ainda meio tonto com tudo aquilo, exclamou impressionado: Quer dizer que como o número n de ônibus é qualquer, se chegarem 50, 100 ou 1 milhão de ônibus com uma infinidade de lugares cada um e todos eles lotados, o tamanho do conjunto de todos esses passageiros é exatamente o mesmo que o conjunto dos números ímpares?! Sim, meu caro, é o que acabamos de ver, disse o matemático. Na verdade, observe que se tivéssemos em vez de n filas de passageiros, infinitas filas (oriundas de uma infinidade de ônibus) a enumeração por ímpares seguindo as setas poderia também ser feita sem problemas. Isso mostra portanto que uma união infinita de conjuntos infinitos, cada um dos quais do mesmo tamanho que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4...\}$, tem o mesmo tamanho que o conjunto dos números ímpares que, por sua vez, tem o mesmo tamanho que o conjunto dos naturais. Quer dizer então, disse o gerente, que se todos os hóspedes fizerem de seu quarto uma ligação telefônica para cada um dos outros hóspedes, o conjunto de todas essas ligações tem o mesmo tamanho que o conjunto dos naturais? Sim, continuou o gerente, como o conjunto de ligações de cada hóspede tem o mesmo tamanho do conjunto dos naturais, o conjunto de todas as ligações de todos os hóspedes é a união infinita de todos esses conjuntos infinitos, cada um deles de mesmo tamanho que o conjunto dos naturais. Bravo!, exclamou o matemático, essa sua observação não somente mostra que você entendeu o espírito da coisa como também será de grande ajuda para o que vou lhe contar agora. Vamos denotar as ligações feitas por cada hóspede da seguinte maneira: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ etc. serão as ligações do hóspede do quarto de número 1 para os de número $2, 3, 4, 5$ etc.; $\frac{2}{1}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{5}$ etc. serão aquelas do hóspede do quarto de número 2 para os de número $1, 3, 4, 5$ etc.; $\frac{n}{1}$, $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{3}$, $\frac{n}{4}$ etc. serão aquelas do hóspede do quarto de número n para os de número $1, 2, 3, 4$ etc.. Procedendo dessa maneira, vemos que todas as ligações foram contempladas. Podemos agora dispor essas ligações em fila como abaixo:

$$
\begin{array}{lllll}
\frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{5}, & \cdots \\
\frac{2}{1}, & \frac{2}{3}, & \frac{2}{4}, & \frac{2}{5}, & \cdots \\
\cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots \\
\frac{n}{1}, & \frac{n}{2}, & \frac{n}{3}, & \frac{n}{4}, & \cdots \\
\cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots
\end{array}
$$

Você pode ver que, utilizando a enumeração feita anteriormente, seguindo as setas mas, agora, em vez de fazê-la usando os números ímpares, usando todos os naturais, obtemos uma correspondência *um a um* entre todas as ligações e o conjunto dos naturais, o que prova sua afirmação. O interessante disso tudo, prosseguiu o matemático, é que também acabamos de mostrar que o conjunto de todas as frações positivas, chamado conjunto dos números racionais positivos, tem o mesmo tamanho do conjunto dos naturais. É claro que o conjunto dos racionais (todas as frações positivas e negativas) tem o mesmo tamanho de $\mathbb{N}$ pois ele é uma união de dois conjuntos (as frações positivas e as negativas), cada um dos quais de mesmo tamanho de $\mathbb{N}$. Uma correspondência *um a um* entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{N}$ pode ser dada, enumerando-se somente com os números ímpares o conjunto das frações negativas e enumerando o conjunto das frações positivas somente com os números pares. O que pretendo tentar agora, é convencê-lo de que, a princípio, isso escapa sobremaneira à intuição, isto é, se olharmos com atenção o conjunto dos racionais, teremos uma impressão bastante forte de que este conjunto é *maior* que o conjunto dos números naturais. Primeiramente, é fácil ver que o subconjunto formado pelas frações da forma $\frac{1}{n}$ isto é, $\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$ é do mesmo tamanho que o conjunto dos naturais. Até aí nada de mais. Sabemos desde a escola que, além dos racionais, existem números que não são racionais, isto é, números que não podem ser escritos na forma $\frac{p}{q}$ (ou seja, como uma divisão de dois números naturais p e q): são os chamados irracionais. Pode-se mostrar, por exemplo, que $\sqrt{2}$ é um desses números. A união desses dois conjuntos é conhecida como o conjunto dos números reais positivos e vamos admitir também que podemos representá-lo como sendo o conjunto de todos os pontos de um semi-reta cuja origem é representada pelo número 0, conforme a **figura 5** abaixo.

Agora, se a e b são dois números quaisquer (racionais ou não) com a menor do que b, a distância entre eles é o número $b - a$. Ora, seja q bem grande, de maneira que $\frac{1}{q}$ seja menor que $b - a$ e considere o conjunto $\{\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \frac{3}{q}, \frac{4}{q}, ...\}$. Este conjunto nos dá uma partição da semi-reta em segmentos de reta de tamanho $\frac{1}{q}$ (cf. **figura 6**).

Assim, necessariamente, um dos elementos desse conjunto está entre a e b pois, caso contrário, teríamos que o segmento entre a e b estaria contido no segmento entre $\frac{p}{q}$ e $\frac{p+1}{q}$ para algum número p, mas isso contradiz o fato de que o segmento entre a e b tem tamanho $b - a$ maior que $\frac{1}{q}$.

Observe: o que acabamos de mostrar é que, como a e b são quaisquer, se fixamos a e tomamos b tão próximo de a quanto quisermos, sempre encontraremos um racional entre eles. Ou seja, dado um número qualquer, encontraremos, tão perto dele quanto quisermos, um número racional.

Nesse momento o gerente completamnte impressionado, exclamou: Pelo que o senhor acaba de dizer, os números racionais ocupam praticamente toda a semi-reta?! Sendo assim, o tamanho do conjunto dos irracionais deve ser menor que o dos racionais, não é? Você tem razão quanto à sua primeira afirmação, disse o matemático; o termo utilizado por nós para expressar esse seu sentimento é *densidade*. Dizemos que o conjunto dos racionais é denso no conjunto dos números reais. Quanto à sua segunda colocação...

5 Quantos infinitos existem?

Nesse momento, o gerente foi de novo chamado com a máxima urgência na portaria do Hotel. Parece que algo grave aconteceu, disse ele ao matemático, seria bom que o senhor me acompanhasse, caso necessitemos de sua orientação. O que houve?, perguntou ele ao chegar à recepção. Sabe os hóspedes amigos do proprietário? disse a recepcionista. Sim, o que é que tem eles? Você lembra que cada um deles estava acompanhado de uma criança, pois é, elas sumiram!! Como, sumiram?, indagou o gerente. É isso que estou dizendo, foi um tal do interfone tocar sem parar, um desespero total. Tivemos a informação de que eles foram vistos pela última vez brincando no jardim do infinito. Nesse momento, o gerente relaxou e, com um ar de senhor da situação, disse: Tenho certeza de que todos subiram na árvore com uma infinidade de galhos - seria a única possibilidade de perdê-los de vista. Árvore com uma infinidade de galhos?! Do que você está falando?, retrucou o matemático. Eu, como consultor do hotel, deveria ser informado de toda e qualquer iniciativa de ocupação de espaço físico!! Quem autorizou o plantio dessa ávore? Foi o próprio dono, devolveu o gerente. Vamos lá, quero ver isso de perto.

Chegando ao jardim, o matemático foi obrigado a sentar-se de tão pálido que estava. O que está acontecendo?, indagou o gerente? Por que está com essa cara? É somente uma árvore com uma infinidade de galhos! Você sabe muito bem, disse o matemático, que essa espécie de árvore tem a propriedade de que, ao final de cada galho, dois novos galhos se iniciam, um partindo para a direita e outro para a esquerda, e isso indefinidamente. Sim, e daí? Continua sendo somente um número infinito de galhos, retrucou o gerente. Se cada um dos pais subir na árvore (sendo eles em número infinito), todas as crianças serão encontradas. Não!!, gritou o matemático. Admitindo-se que elas percorram qualquer caminho infinito, em tempo finito, mesmo que todas elas sigam o mesmo caminho, a chance de encontrá-las é pequena! Não acredito, você deve estar brincando!, devolveu o gerente. Colocando-se agora mais sério do que nunca, o matemático disse: Vou mostrar que o tamanho do conjunto de todos os caminhos possíveis é maior que a infinidade de pais; sendo assim, mesmo que todos eles saiam à procura de seus filhos por caminhos distintos, sobrará necessariamente uma infinidade de caminhos não percorridos; logo, a chance de todos serem encontrados não é muito boa, você concorda? O que você está me dizendo é que existe um infinito maior que aquele dos naturais?!, perguntou o gerente perplexo. Isso mesmo meu caro, e é por isso que precisamos encontrar uma boa solução para sairmos dessa, mas antes disso, vou convencê-lo do que falei. Pegando papel e lápis, o matemático desenhou a árvore seguindo a disposição dos galhos como na **figura 7**.

Agora note, disse o matemático, que, partindo do tronco, nos deparamos com dois galhos, um à direita e outro à esquerda e, ao final de cada um, nova bifurcação aparece, e assim indefinidamente. Vamos agora dar nome aos caminhos: o tronco tem o símbolo 0 seguido de um ponto e a cada vez que se chega a uma bifurcação o caminho da direita tem 0 como símbolo, enquanto o da esquerda, o símbolo 1. Assim, o símbolo 0.100011010100100... corresponde ao caminho que se inicia no tronco e em seguida toma as direções esquerda, direita, direita, direita, esquerda, esquerda, direita, esquerda, direita, esquerda, direita, direita, esquerda, direita, direita,b... seguindo então sempre à direita. Isso pode ser visto na **figura 8** .

Dessa maneira, tomando-se qualquer caminho infinito, a ele corresponderá um e somente um número com uma infinidade de zeros e uns. Da mesma maneira, dado qualquer número com uma infinidade de zeros e uns, podemos identificar precisamente a qual caminho esse número corresponde. Acabamos de mostrar, portanto, que o conjunto de todos os possíveis caminhos infinitos constituídos pelos galhos da árvore tem o mesmo tamanho que o conjunto de todos os números formados por uma infinidade de zeros e uns. Denotaremos este conjunto pela letra C.

Resta então mostrar que C é de tamanho maior que o conjunto dos naturais (que é o tamanho do conjunto de pais). Vamos primeiramente mostrar que C não é menor que $\mathbb{N}$. Escolha em C um elemento que chamaremos de x_1. Como C é infinito, podemos tomar em C um outro elemento x_2 distinto de x_1 e, pelo mesmo motivo, um elemento x_3 distinto de x_1 e x_2. Repetindo indefinidamente este argumento, obtemos um subconjunto de C cujos elementos são $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ Claramente este conjunto tem o mesmo tamanho que o conjunto dos naturais, bastando para isso fazer a seguinte correspondência *um a um* :

$1 \to x_1$
$2 \to x_2$
$3 \to x_3$
.
.
.
$n \to x_n$
.
.
.

Note que, segundo este argumento, em lugar de C poderíamos ter tomado qualquer conjunto infinito, isto é: qualquer conjunto infinito contém um subconjunto de mesmo tamanho que o conjunto dos naturais, portanto não existe nenhum conjunto infinito de tamanho menor que o conjunto dos naturais. Vou mostrar agora, disse o matemático, que C é de tamanho maior que os naturais. Para isso, basta mostrar que não é possível estabelecer uma correspondência *um a um* entre $\mathbb{N}$ e C, você concorda? Sim, concordo, respondeu o gerente. Bem, primeiramente, note que fazer uma tal correspondência entre $\mathbb{N}$ e qualquer conjunto significa enumerar os elementos desse conjunto, ou seja, dizer quem será o primeiro elemento, o segundo, o terceiro e assim sucessivamente. Podemos dizer que essa correspondência não é nada mais que uma listagem dos elementos do tal conjunto. Sendo assim, basta mostrarmos que em qualquer listagem de C, sempre haverá um elemento de C não contemplado. Considere então uma listagem qualquer, digamos, a representada a seguir:

$1 \to 0,110010100110...$
$2 \to 0,001101111000...$
$3 \to 0,111001010001...$
$4 \to 0,101010101010...$
. . .
$n \to 0,0010111100111...$
.
.

Vou agora exibir um elemento de C que não consta nessa listagem. Considerando os algarismos após a vírgula, vemos que o primeiro algarismo do primeiro elemento é 1, neste caso para obter nosso elemento coloco nesta posição o algarismo 0. O segundo algarismo do segundo elemento sendo 0, coloco nesta posição o algarismo 1. O terceiro algarismo do terceiro elemento sendo 1, coloco 0 nesta posição. O quarto algarismo do quarto elemento sendo 0, coloco 1. O n-ésimo algarismo do n-ésimo elemento sendo, digamos, 0, coloco 1 na n-ésima posição e assim por diante. Afirmo que o elemento acima não está na listagem dada. Por quê?, indagou o gerente. Ora, se estivesse na listagem, ele ocuparia uma posição, ou seja, ele seria o elemento de número, digamos, 245 da lista. Mas o elemento de número 245 possui, como duzentésimo quadragésimo quinto dígito, o número, digamos 1 e o elemento que construímos tem como dígito, nesta posição, o número 0. Este raciocínio mostra que nosso elemento não pode estar em nehuma posição da lista. Concluímos assim que o infinito de C é maior que o de $\mathbb{N}$.

Que loucura! existem dois infinitos!!, exclamou o gerente. Para mim o infinito era um só, infinito é infinito, ora bolas.

Rá! retrucou o matemático, o que você não sabe é que existem uma infinidade de infinitos distintos.

Como assim?

Você já ouviu falar em George Cantor?, perguntou o matemático.

Não, respondeu o gerente.

Pois é, Cantor(1845-1918) um matemático russo que se naturalizou alemão é considerado o grande teórico do infinito. Todo esse estudo sobre o tamanho do infinito foi desenvolvido por ele. Ele mostrou, entre outras coisas, que, dado um conjunto infinito qualquer A, se considerarmos o conjunto $P(A)$ formado por todos os subconjuntos de A, temos um conjunto infinito (note que ele contém todos os subconjuntos formados por um só elemento de A) de tamanho maior que o conjunto A. Por exemplo, no nosso caso, o conjunto $P(\mathbb{N})$ cujos elementos são os subconjuntos de $\mathbb{N}$, tem tamanho maior que $\mathbb{N}$. Na verdade, mostra-se que $P(\mathbb{N})$ tem o mesmo tamanho do conjunto C acima. Se agora tomarmos o conjunto $P(C)$ formado por todos os subconjuntos de C, obteremos um conjunto infinito de tamanho maior que C, e assim por diante. Isso mostra que temos uma seqüência de conjuntos infinitos cada um maior que o outro, sendo o menor deles o conjunto $\mathbb{N}$. Cantor deu nome a esses infinitos: são os chamados *cardinais transfinitos*. Usando uma noção chamada noção de ordem, Cantor obteve outros infinitos aos quais ele deu o nome de *ordinais transfinitos* [**4**]. O conjunto C acima é chamado **conjunto de Cantor**. Na verdade, o conjunto de Cantor foi por ele apresentado usando uma construção completamente diferente, em que ele utilizava o conjunto dos números reais compreendidos entre 0 e 1. Note que da maneira como apresentamos C, podemos pensá-lo também como um subconjunto dos reais entre 0 e 1, com a diferença que todos os elementos estão na verdade entre 0 e 0,111111111111.... e onde todos os dígitos na expansão decimal são somente zeros e uns.

Ei ei ei!, espera aí, disse o gerente. A gente não tinha visto que os racionais (conjunto das frações) ocupavam praticamente toda a reta dos reais (ou seja, são densos nos reais)?

Sim, e daí?, devolveu o matemático.

Ora, sendo os racionais do mesmo tamanho de $\mathbb{N}$ e ocupando quase toda reta real, como é possível, usando somente os reais entre 0 e 1, obter um conjunto, no caso C, maior que $\mathbb{N}$?

Boa pergunta! lembra que mostramos que tants os pares como os ímpares têm o mesmo tamanho de $\mathbb{N}$, embora sejam subconjuntos deste? Pois é, o mesmo acontece com os reais $\mathbb{R}$ e C. Embora um seja subconjunto do outro, os dois têm o mesmo tamanho. Embora os racionais sejam densos em $\mathbb{R}$, são os irracionais que ditam o tamanho dos reais. O fato é que o conjunto dos irracionais é também denso nos reais e seu tamanho é maior que o conjunto dos racionais (portanto dos naturais). Na verdade ele tem o mesmo tamanho dos reais (e portanto de C) **[5]** .

Nossa, esquecemos dos meninos!, exclamou o gerente. Os pais já devem estar desesperados! Como vamos achá-los?

Calma, calma!

Como assim? Por que essa calma agora? Inicialmente o senhor estava tão nervoso, dizendo que seria impossível encontrarmos todas as crianças!

É, mas fiz isso só para assustar você e o patrão. Espero que da próxima vez ele se lembre de me consultar antes de mandar fazer qualquer coisa aqui no hotel. Vá lá e diga que estamos com a situação sob controle e que, em breve, eles serão chamados.

Sim senhor, disse o gerente, e assim foi feito.

Ao retornar, o gerente estava ansioso para ver qual seria a solução encontrada pelo matemático para encontrar as crianças.

Vamos lá, continue!, solicitou ele ao matemático.

Bem, vimos que o conjunto de caminhos é maior que o conjunto de pais. Por outro lado, os caminhos considerados são todos os caminhos infinitos possíveis, pois representamos cada um deles por seqüências infinitas de zeros e uns (qualquer elemento de C é dessa forma). Imagine que cada uma das crianças pudesse, num tempo finito, percorrer um desses caminhos em "sua totalidade". Neste caso, mesmo que os pais também pudessem fazer o mesmo, num tempo finito, teríamos uma quantidade enorme de caminhos não percorridos, pois o tamanho do conjunto de tais caminhos infinitos é muito maior do que o do conjunto de pais. Foi admitindo essa situação fictícia (poder percorrer um caminho em sua totalidade, num tempo finito) que afirmei serem poucas as chances de encontrarmos todas as crianças. Assim, o que temos em realidade é que, em qualquer instante considerado, cada criança terá percorrido um número finito de galhos. Para achá-las, basta portanto que os pais subam um pouco mais rápido que as crianças. Se é que isso é possível!

BIBLIOGRAFIA

[1] Amoroso Costa, M. *As idéias fundamentais da matemática e outros ensaios.* Editora Convívio, 1981, 3° edição.

[2] Davis, P. J./ Hersh, R. *L'univers Mathematique.* Gauthier-Villards, 1985

[3] Dugas, R. *Essai sur l'incompréhension mathématique.* Librarie Vuibert, 1940.

[4] Cunha, M.O., Lopes, C.N., Santos, A.B.A. *Uma introdução ao estudo dos números transfinitos* Pré-publicação IM Uff

[5] Gusmão, P. *O tudo e o nada.* Em preparação

[6] Hrbacek,K., Jech, T. *Introduction to Set Theory* Nova York, Marcel Dekker, 1978

[7] Poincaré, H. *Dernières Pensées.* Flammarion, 1913.