# GRAFOS, POR QUE NÃO ?

***Jorge Bria***
· *Doutorando em Eng. de Produção COPPE/UFRJ*
*Professor Adjunto - GGM/UFF*
*jbria@nitnet.com.br*

# GRAFOS, POR QUE NÃO ?

***"O assunto mais importante do mundo pode ser simplificado até o ponto em que todos possam apreciá-lo e compreendê-lo. Isso é - ou deveria ser - a mais elevada forma de arte!"***

***C. Chaplin***

A Matemática de 1º e 2º graus deve justificar-se como um fim em si mesma? Nesses níveis, o ensino de Matemática é ministrado de forma efetivamente atraente e produtiva para a maioria dos alunos, independentemente de suas aptidões naturais, afinidades ou vocações profissionais? Adicionalmente, mas não menos importante, que novas transformações (sobre conteúdos ou metodologia) poderiam contribuir para uma maior atualização da Matemática da Escola de 1º/2º Graus, rumo ao século XXI, frente a variáveis como, por exemplo, o advento do computador ou os fortes novos apelos externos que agem sobre nossos estudantes?

O que se segue motiva-se essencialmente a partir dessas questões, assumindo como premissas (nossos principais referenciais de apoio!):

**(I) a necessidade de um efetivo exercício da interdisciplinaridade!**

**(II) a conveniência de uma aproximação mais concreta entre o que se aprende na escola e as situações reais de nosso cotidiano !**

A partir desse entendimento, chegamos ao nosso tema-título: ***GRAFOS, POR QUE NÃO?***

## *Este artigo objetiva simplesmente:*

**1.** Propiciar **alguma iniciação aos grafos e suas aplicações** (apenas certas idéias básicas!), predominantemente através de exemplos e de forma intuitiva (evitam-se formalismos), para aqueles que não tiveram ainda esta oportunidade, até para que possam adquirir condições mínimas para alguma reflexão no sentido do objetivo (2) que se segue.

**2.** Deixar brotar, ao longo de sua apresentação, a idéia de que **o trabalho com grafos em algum nível, na Matemática da Escola de 1º/2º Graus, seria viável e oportuno**.

A tese que envolve nosso objetivo (2) vem sendo de particular interesse do autor no momento. Relativamente à mesma, no entanto, não se explicita neste artigo qualquer proposta metodológica concreta. A intenção é apenas buscar fazer tal idéia germinar e, possivelmente, estimular contatos e trocas de impressões sobre o assunto.

"O conceito de grafo é simples, porém fértil em aplicações e problemas atraentes" - assim inicia-se [4]. De fato, destaque-se que os grafos mostram-se inesgotáveis, em termos de sua aplicação, sejam para a resolução de problemas nos mais variados ramos de conhecimento ou abordagem de uma infinidade de situações de nosso cotidiano. Isto poderá ser comprovado por qualquer leitor mesmo leigo no assunto, a partir deste artigo, se posteriormente der-se ao trabalho de realizar consultas às nossas *Referências / Leituras Sugeridas*, conforme o comentamos no final.

Quanto à viabilidade e oportunidade dos grafos a nível de 1º/2º graus, são indiscutíveis:

■ a enorme abrangência de possibilidades de aplicação dos grafos, como já a antecipamos.

■ a extrema facilidade com que inúmeras situações reais de nosso cotidiano podem ser tratadas através dos grafos de forma bastante accessível aos estudantes de 1º/2º graus, em função da série ou segmento em que sejam trabalhadas.

■ o inegável "potencial de competência" dessas aplicações/exemplos para aumentarem o poder de sedução da Matemática sobre nossos estudantes, notadamente àqueles que não possuam grandes afinidades com a mesma.

■ a natural associação (mas de abordagem opcional!) dos grafos com o uso do computador, da qual o professor poderia se valer, com sensibilidade e criatividade, na medida certa, em função das possibilidades circunstanciais para a sua realização; por exemplo, até de forma indireta, através de algum trabalho criterioso com algoritmos em prol do desenvolvimento do raciocínio lógico, visto que naturalmente, em nosso cotidiano, movimentamo-nos muito "de forma algorítmica" sem nos darmos conta disso - o leitor iniciante terá oportunidade de melhor entendê-lo em comentário mais adiante.

■ a grande flexibilidade característica do estudo dos grafos, no sentido de poderem ser introduzidos e trabalhados de várias formas distintas, em função da ênfase com que se julgue mais conveniente orientar sua exploração: formal ou intuitivamente, através de figuras/diagramas ou mais estruturalmente, de forma lúdica, a partir da resolução de problemas, associando-os diretamente ao uso do computador ou não…

## *VAMOS LÁ... AOS GRAFOS !*
## *"ABSORVENDO O CONCEITO" A PARTIR DE NOSSA FIGURA 1.*

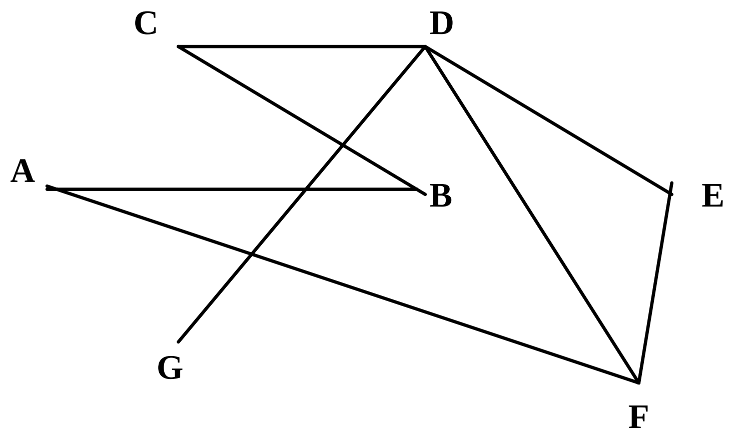



***Figura 1***

A figura 1 ilustra-nos um **grafo** que tem 7 **vértices** (A, B, C, D, E, F e G) e 8 **arestas** (AB, BC, CD, DE, EF, FA, DG e DF).

Utiliza-se um grafo, por exemplo, para a modelagem de um problema real. Assim, o grafo da figura 1 poderia ser utilizado para a resolução do seguinte

---

## *Problema 1*

"Sete pessoas (A, B, C, D, E, F e G) moram numa mesma cidade. Cada uma delas conhece as outras seis. São pares de pessoas que se gostam: AB, BC, CD, DE, EF, FA, DG e DF. Qualquer outro par, que não estes, refere-se a duas pessoas que não se gostam. Há, dentre essas sete pessoas, alguma que seja mais (menos) popular do que todas as outras? Quem?"

---

Inicialmente, dedicamo-nos à **modelagem do problema**. É feita a escolha de que objetos serão associados a vértices. Para nosso Problema 1, decidamos que "pessoas serão vértices". Ficam, então, nomeados como vértices (figura 1): A, B, C, D, E, F e G. Em seguida, procura-se detectar que relação entre os vértices será a mais indicada para a análise particular. Optemos por "dois vértices estarão relacionados se corresponderem a duas pessoas que se gostam". Ficam definidas as arestas: AB, BC, CD, DE, EF, FA, DG e DF. Por exemplo, o fato das pessoas A e G não se gostarem implica a não existência de aresta conectando os vértices A e G. Acabamos de conceber o **grafo-modelo** para o Problema 1. É precisamente o grafo da figura 1! Quanto à resolução propriamente dita, no caso particular deste Problema 1, chegamos à solução de forma imediata, simplesmente visualizando seu grafo-modelo. De fato, D e G são os vértices sobre os quais "incidem", respectivamente, mais e menos arestas, a saber: 4 e 1. Portanto, D é a pessoa mais popular (G é a menos)!

Mas perceba-se bem que:

- Se nosso universo de pessoas fosse o de todos os alunos de uma determinada escola (centenas? milhares?) e tivéssemos à mão a listagem de "quem gosta de quem" (supondo-se reciprocidade nesta relação), após concebido o tipo de grafo-modelo a ser utilizado, seria necessário o uso do computador para chegarmos às respostas. Pois não se tentaria resolver o problema analisando-se uma figura com tamanho emaranhado de pontos e linhas. Nada seria feito através de análise de figuras. Seriam utilizadas técnicas para resolução computacional do problema. E para isto, antes de tudo, seria necessário dispormos de um **algoritmo**, que se constitui simplesmente num roteiro ordenado de procedimentos, do tipo "receita de bolo" (exemplo: *comece de um vértice qualquer, conte quantas arestas nele incidem, registre este número, parta para outro vértice segundo "tal estratégia", conte quantas arestas incidem neste novo vértice, registre este número, agora faça o se-*

*guinte:…, … , finalmente compare os números registrados, etc*). Tal algoritmo seria traduzido para alguma linguagem de programação. E assim, "percorrendo o grafo" (não pela figura, mas a partir de uma listagem), o computador faria a execução da resolução do problema seguindo os passos ditados pelo algoritmo.

• O mesmo grafo da figura 1, que resolveu nosso Problema 1 de "pessoas e amizades", poderia estar modelando outros problemas, em contextos totalmente distintos! Por exemplo: os vértices de A a G poderiam estar representando cidades e "arestas sendo estradas"; A a G poderiam estar representando disciplinas (num quadro de horários escolar) com arestas indicando duas disciplinas que não pudessem "chocar horários"; A a G poderiam estar representando palavras e cada aresta indicando duas palavras com a mesma terminação (uma rima). E assim por diante, de forma inesgotável, a serviço da criatividade do amigo professor!

Trabalhamos agora em mais cinco problemas. Quando de sua resolução, alguns resultados da Teoria dos Grafos são colocados, de forma apenas intuitiva ou indireta em sua maioria. Nada de preocupações com rigor ou elaborações além do estritamente necessário. Também não exploramos algoritmos. Estamos procurando, tão somente, transmitir certas idéias gerais sobre os grafos e suas aplicações, principalmente no sentido de nossos objetivos (1) e (2), enfatizando mais o ato da modelagem.

Para facilitar nossa comunicação daqui em diante, fixemos a seguinte terminologia:

• o número de vértices de um grafo G como sendo a **ordem** de G.

• se XY é uma aresta, dizemos que esta é **incidente** nos vértices X e Y.

• o número de arestas incidentes em cada vértice é dito o **grau** deste vértice.

## ***Problema 2:*** *Prepotencius e Tamao...Um Caso para Pensar!*

"A colônia de férias de *Grafohill* estava sendo preparada para, mais uma vez, receber jovens para a temporada de verão. Seu gerente grego, Prepotencius, mandou seu mais novo empregado, o humilde japonês Tamao, envernizar as maçanetas de madeira dos dois lados de cada uma das 20 portas (veja planta na figura 2), dando-lhe as devidas orientações. Para cada porta, inclusive para as 5 portas de entrada, deveria adotar o seguinte procedimento: envernizar a maçaneta do seu lado, passar para o outro lado, fechar a porta e envernizar a outra maçaneta dessa mesma porta, não podendo mais abri-la naquele dia. Afinal, o verniz demoraria 24 horas para secar completamente. No dia seguinte, portanto, todas as maçanetas estariam envernizadas e secas. Fez mais exigências: uma vez envernizadas as maçanetas da 1ª porta, à escolha de Tamao, não poderia pular qualquer janela em momento algum nem passar por porta nenhuma sem que antes envernizasse uma de suas maçanetas e, imediatamente após, sempre conforme o procedimanto descrito, a outra. Tudo por "motivos técnicos" mas, na verdade, muito mais pela personalidade intransigente de Prepotencius, temido por seu jeito exigente, autoritário e intolerante. Ao final de todo esse serviço naquele dia, todas as portas estariam fechadas, as maçanetas envernizadas e, aí então, imediatamente, o empregado ainda deveria ir ao centro da cidadezinha local comprar material de limpeza antes do anoitecer e recolher-se à sua casa, trazendo-o à colônia só no dia seguinte. Tamao nem questionou.

Algumas horas depois, muito confuso, o empregado procurou o gerente comunicando-lhe que não estava conseguindo concluir o serviço seguindo à risca as ordens que recebera, não tendo, portanto, envernizado todas as maçanetas. Sem pensar duas vezes, alegando que "jamais admitiria tamanha incompetência ou má vontade", Prepotencius demitiu Tamao.

Até hoje corre pelas redondezas que o gerente foi extremamente injusto com o empregado pois seria impossível executar o serviço cumprindo-se rigorosamente todas as exigências.

(i) Você, o que acha ? Concorda com este julgamento feito pela vizinhança? Isto é, seria realmente impossível a execução rigorosa das incumbências impostas?

(ii) Analise se tal execução seria possível em função da maçaneta a ser envernizada primeiro, caso Prepotencius tivesse feito um tal tipo de imposição.

(iii) Tal execução seria possível caso Tamao fosse obrigado a começar por uma maçaneta exterior à colônia, estando dispensado de fazer as compras após envernizar todas as maçanetas?"

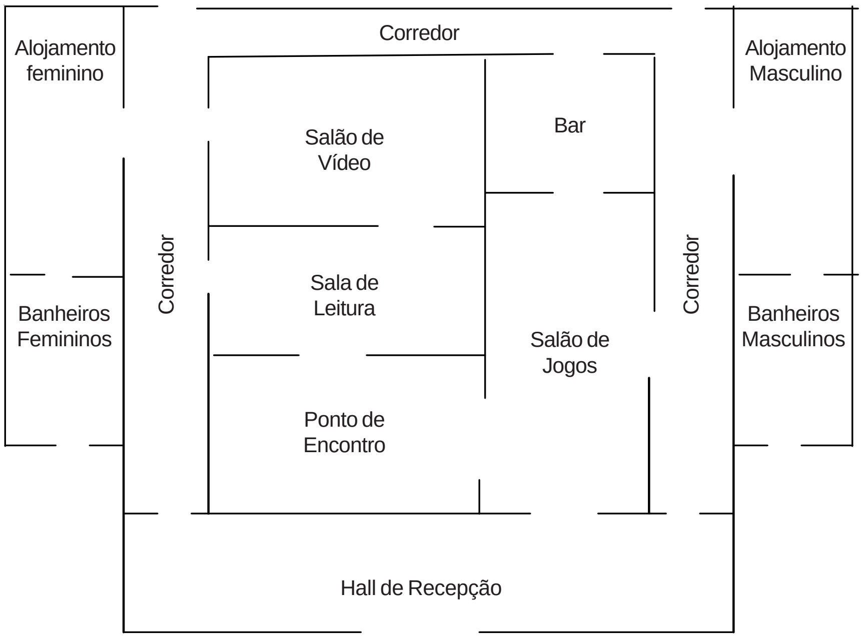



***Figura 2*** *- Planta de Grafohill (Problema 2)*

Vamos construir um grafo-modelo G (figura 3) para nosso Problema 2. Os cômodos correspondendo aos vértices (representando também por um vértice o exterior do estabelecimento); as portas correspondendo às arestas.

Neste ponto, é bom esclarecermos outro conceito. Um grafo G é **conexo** se, para cada par XY de seus vértices, existe um percurso conectando X a Y, isto é, G não tem "partes separadas". **Neste artigo, o termo *grafo* está sendo utilizado sempre no sentido de *grafo conexo*!**

Para o Problema 2, utilizaremos o seguinte resultado da Teoria dos Grafos: "é possível percorrer todas as arestas de um grafo, cada uma por uma única vez (sem repetição) se, e somente se, o grafo possui todos os vértices com grau par ou exatamente dois vértices de grau ímpar; no primeiro caso, os vértices inicial e final de um tal percurso coincidem; no segundo caso, os dois vértices (distintos) de grau ímpar são exatamente o inicial e o final do percurso".

Envernizar todas as maçanetas segundo as condições impostas é traduzível, em "linguagem de grafos", por percorrer todas as arestas sem repetição de nenhuma delas. O grafo G possui dois vértices de grau ímpar (e só estes); a saber: 1 (exterior) e 9 (sala de leitura), com graus 5 e 3, respectivamente. Daí, o envernizamento exigido por Prepotencius seria possível, unicamente de duas formas. Começando por uma maçaneta interna à sala de leitura e terminando por uma do exterior do estabelecimento, ou a opção contrária. Esta última, no entanto, não serviria (implicaria Tamao ficar "preso" na sala de leitura até o dia seguinte), visto haver uma imposição de que, após concluído o serviço, e no mesmo dia, compras deveriam ser feitas na cidade pelo empregado. Havia roteiros que permitiriam a Tamao cumprir rigorosamente as ordens que lhe foram impostas. Todos, no entanto, deveriam ser iniciados pelo interior da sala de leitura. Sendo assim, e não se levando em consideração a "falta de sensibilidade social" de Prepotencius, este não foi injusto (no sentido de ter exigido algo impossível!). Esta é nossa resposta à questão (i). E as respostas a (ii) e (iii) tornam-se imediatas.

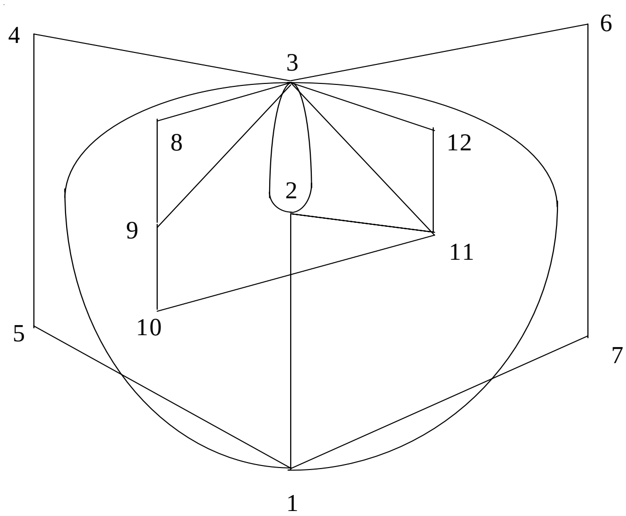



***Figura 3*** *- Grafo-modelo G do Problema 2, considerando:*

| | |
|---|---|
| *1 - Exterior* | *7 - Banheiros Masculinos* |
| *2 - Hall de Recepção* | *8 - Salão de Vídeo* |
| *3 - Corredor* | *9 - Sala de Leitura* |
| *4 - Alojamento Feminino* | *10 - Ponto de Encontro* |
| *5 - Banheiros Femininos* | *11 - Salão de Jogos* |
| *6 - Alojamento Masculino* | *12 - Bar* |

# *Mas, afinal , quais as origens do estudo dos grafos ?*

Historicamente, consta como **primeiro problema em grafo**s uma espécie de charada matemática, proposta e resolvida por **Euler** (1707-1783). Trata-se de nosso

## ***Problema 3*** *: O Problema das Pontes de Königsberg*

"Havia um rio com duas ilhas A e B. Rotulando-se as duas margens do rio, respectivamente, por C e D, tínhamos 7 pontes: uma ligando as duas ilhas A e B, duas de A até a margem C, duas de A até a margem D, uma de B a C e a outra de B a D (veja "mapa" na figura 4). Seria possível, partindo de uma das regiões (qualquer das duas margens ou das duas ilhas), atravessarmos as 7 pontes sem repetir nenhuma?."

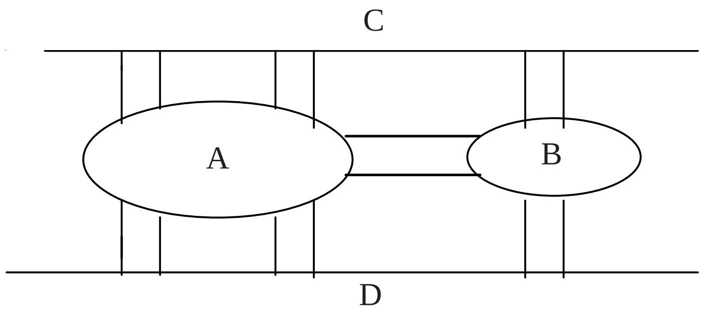



***Figura 4*** - *Problema das Pontes de Königsberg*

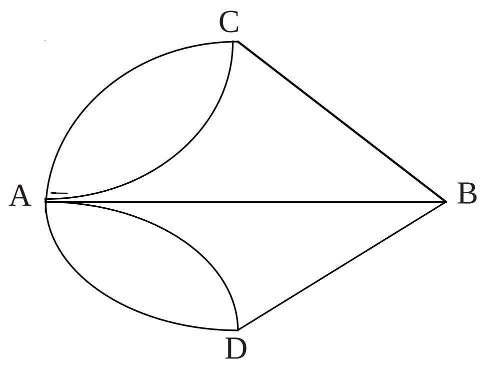



***Figura 5*** - *Grafo-modelo do Problema 3*

Construamos nosso grafo-modelo (figura 5) fazendo cada margem ou ilha ser representada por um vértice, cada ponte sendo representada por uma aresta.

Mais uma vez vamos utilizar o resultado do qual nos valemos quando da resolução do Problema 2. E a resposta ao Problema 3 torna-se imediata: Impossível! Pois os quatro vértices de seu grafo-modelo possuem grau ímpar: A tem grau 5; para os demais, grau 3. Não existe um tal percurso através das sete pontes, voltando-se ou não à região inicial.

## ***Problema 4***

"Para um determinado Congresso estão cogitados, em princípio, 7 minicursos. A serem confirmados ou não em função da disponibilidade de horários, obedecidas as seguintes condições:

- Em todos os dias, durante o período de realização do Congresso, deve haver sessões de todos os minicursos. Cada minicurso deve ser oferecido em horário fixo (válido para todos os dias), podendo ser alocados num mesmo horário mais de um minicurso (há número suficiente de salas para isso). O horário reservado a cada minicurso deve ser, obrigatoriamente, 8:00/9:30, 9:30/11:00, 11:00/12:30, 14:30/16:00 ou 16:00/17:30.

- Denominando os minicursos por M1, M2, M3, M4, M5, M6 e M7, não podem ter horários coincidentes: M1 com M3, M4, M6 e M7 / M2 com M3, M5 e M7 / M3 com M1, M2, M5, M6 e M7 / M4 com M1, M5, M6 e M7 / M5 com M2, M3, M4 e M7 / M6 com M1, M3 e M4 / M7 com M1, M2, M3, M4 e M5 .

Os 7 minicursos podem ser oferecidos, isto é, é possível destinar horários para eles com as condições impostas? Se afirmativo, otimize tal alocação, isto é, conclua sobre o número mínimo de horários fixos a serem utilizados. Exemplifique um quadro de horários realizando este mínimo."

Para esse problema, e até o final deste artigo, não nos referimos mais a resultados da Teoria dos Grafos. Nos Problemas 2 e 3, isto foi feito só para ilustrar mais claramente a metodologia usual de resolução. Daqui em diante, apenas damos alguma idéia sobre a estratégia geral a ser aplicada, sem explicitarmos precisamente os resultados que estariam sendo envolvidos.

O grafo-modelo do Problema 4 (figura 6) pode ser concebido correspondendo-se vértices a minicursos; e dois vértices estando conectados (por uma aresta) se os mesmos corresponderem a minicursos que não possam ter horários coincidentes. Considere-se, agora, a estratégia de serem atribuídas cores aos vértices de forma que a dois **vértices adjacentes** (isto é, conectados por alguma aresta) nunca seja associada a mesma cor. Na prática, estamos fazendo cada cor representar um horário. Sendo assim, as questões centrais do enunciado traduzem-se por: *Qual o número mínimo de cores com que se pode colorir os vértices do grafo-modelo de modo que a vértices adjacentes sejam sempre atribuídas cores distintas? E concretamente, por exemplo, que alocação de cores feita dessa forma poderia realizar tal mínimo?*. É fácil concluir (figura 7) que os sete minicursos podem ser oferecidos. E mais: são suficientes apenas quatro dos cinco horários disponíveis; por exemplo, 16:00/17:30 pode ser destinado a outras atividades do Congresso.

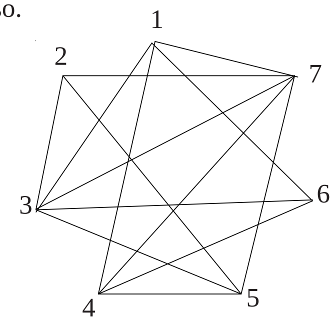
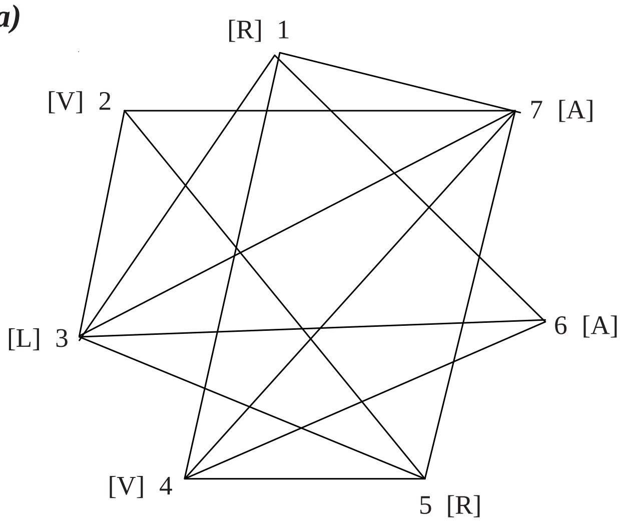



***Figura 6*** *-Grafo-modelo do Problema 4*

***(a)***




***(b)***

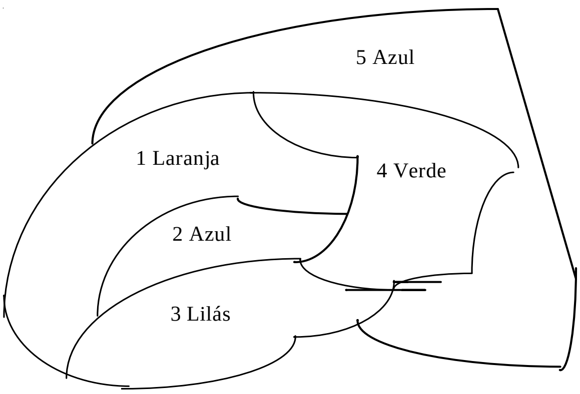
| *Horário* | *Cor associada* | *Minicursos oferecidos* |
|---|---|---|
| *8:00/9:30* | *rosa* | *M1 e M5* |
| *9:30/11:00* | *verde* | *M2 e M4* |
| *11:00/12:30* | *laranja* | *M3* |
| *14:30/16:00* | *azul* | *M6 e M7* |
| *16:00/17:30* | *desnecessária* | *nenhum* |

***Figura 7 - (a)*** *Um exemplo de possível atribuição de cores (para vértices adjacentes, cores distintas) no grafo da figura 6 (Problema 4), caracterizando seu número mínimo.*
***(b)*** *Uma alocação de horários que realiza tal mínimo.*

Proposto em 1852 e resolvido completamente mais de um século depois!…É o nosso

# *Problema 5: O Problema das 4 Cores*

"É possível colorir-se qualquer mapa (plano) com apenas 4 cores de modo que regiões (estados de um país, por exemplo) que façam fronteira entre si fiquem com cores distintas?"




A resposta é "Sim"! As figuras 8 e 9 mostram-nos como se modelam mapas em grafos para efeito do tratamento dessa questão. E exemplificam uma atribuição de 4 cores satisfazendo à condição imposta no enunciado do Problema 5, para certo mapa em particular.

***Figura 8*** *- Mapa de um país com 5 estados. Bastam 4 cores para pintá-los de modo que a estados vizinhos não se corresponda a mesma cor. Para este mapa, perceba-se não ser possível o uso de apenas 3 cores com o mesmo fim.*

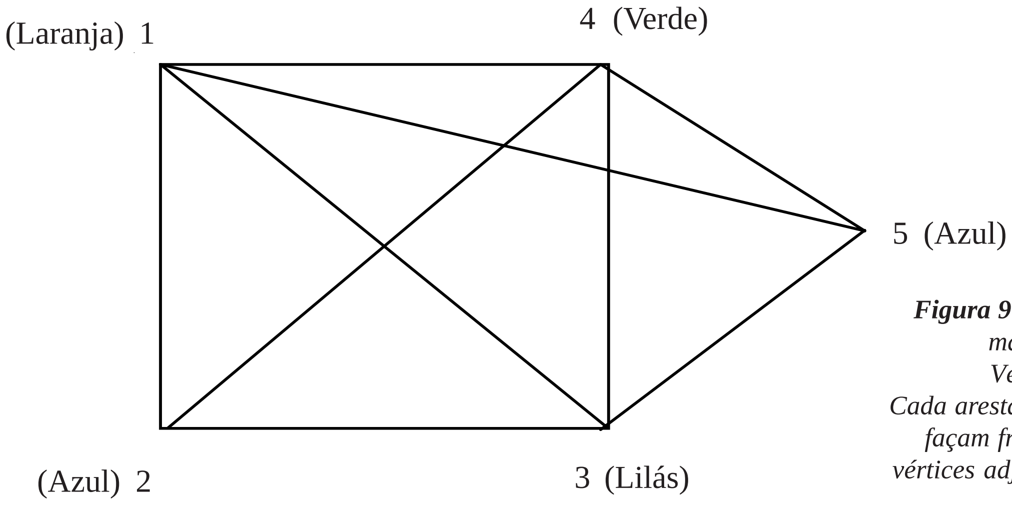



***Figura 9*** *- Grafo-modelo para o mapa da figura 8.*
*Vértices: estados.*
*Cada aresta indica dois estados que façam fronteira entre si (para vértices adjacentes, cores distintas)*

---

## *Problema 6*

"Beatriz deseja fazer chegar a seis outras pessoas (listagem mais adiante) o aviso sobre uma festa. Por alguma razão, resolveu fazê-lo através de uma "corrente de convites", na qual estão impostas as seguintes condições :

- Cada pessoa deve avisar a uma só outra, começando por ela própria, Beatriz.

- Cada pessoa, ao avisar, deve comunicar à outra sobre que pessoas já sabem da festa através dessa corrente (para que ninguém seja avisado mais de uma vez).

- Cada aviso só pode ocorrer entre duas pessoas que sejam amigas (nem todas essas pessoas são amigas entre si).

- Quando todos já souberem da festa, a última pessoa avisada, que deve ser obrigatoriamente amiga de Beatriz, deve comunicar a esta que a corrente foi concluída.

Beatriz é amiga de Vera, Clarisse e Marcelo; Vera é amiga de Beatriz, Paulo e Luciana; Clarisse é amiga de Beatriz e Jonas; Marcelo é amigo de Beatriz e Luciana; Jonas é amigo de Clarisse e Paulo; Luciana é amiga de Vera e Marcelo; Paulo é amigo de Vera e Jonas.

Obedecendo-se às condições impostas, a corrente pretendida por Beatriz é possível? Caso afirmativo, exemplifique uma ordem em que tal corrente poderia se desenvolver."

---

Associemos pessoas a vértices; cada aresta indicando duas pessoas amigas. Sejam:

1-Beatriz, 2-Vera, 3-Clarisse, 4-Marcelo, 5-Jonas, 6-luciana e 7-Paulo (figura 10).

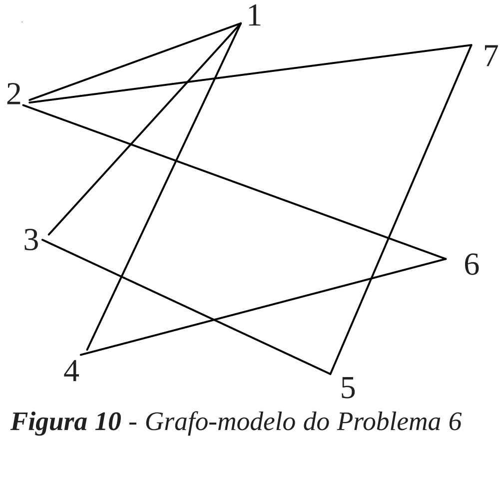



***Figura 10*** *- Grafo-modelo do Problema 6*

Na "linguagem dos grafos", as duas questões do enunciado colocam-se assim: *É possível um percurso começando em 1 (Beatriz), passando por todos os vértices sem repetir nenhum e voltando ao vértice 1? Exemplifique-o.* A resposta é "Sim" e uma ordem possível é 13572641.

Iniciamos nossa exposição defendendo (com base em nossos referenciais (I) e (II), no mínimo!) que *o trabalho com grafos em algum nível, na Matemática da Escola de* $1^o/2^o$ *Graus, seria viável e oportuno*, sugerindo-o como uma contribuição a mais para tornar-se o ensino de Matemática mais atraente (para um número bem maior de estudantes, independentemente de seu perfil!), produtivo e atualizado. E ainda poderíamos acrescentar a possibilidade de utilização dos grafos de forma metodologicamente associada a conteúdos já clássicos como, por exemplo, Combinatória (leia sobre isto em [2], para melhor entendimento). No entanto, ilustramos apenas seis problemas, visando dar ao leitor só uma breve noção inicial sobre o quanto a tese *"grafos nos* $1^o/2^o$ *graus"* é defensável. Mas que não se fique só nisso! Aos mais interessados pelo tema, para possível consolidação de sua convicção quanto à oportunidade dessa defesa, recomendamos fortemente consultas às nossas *Referências / Leituras Sugeridas*, esclarecendo que listamos exclusivamente obras ou artigos que julgamos mais accessíveis ao leitor iniciante em grafos.

De [1], deste mesmo autor, foram extraídos os seis problemas aqui apresentados (os enunciados dos Problemas 3 e 5 são clássicos, encontráveis na maioria dos livros sobre grafos). Texto com 95 páginas, no mesmo estilo do presente artigo, porém propiciando visão geral mais abrangente sobre a teoria e o uso de algoritmos.

Da conhecida Revista do Professor de Matemática (RPM), da SBM, selecionamos três artigos: [2] , [4] e [5]. Nestes, o leitor também terá acesso a alguns outros conceitos, resultados e aplicações, através de leitura bem mais ágil (do que em [1], [3] e [6]).

Em [6], de forma muito interessante, e em inúmeros e diversificados ramos de conhecimento, são apresentadas modelagens bem simples no Capítulo 3, bem como outras um pouco mais elaboradas ao longo do desenvolvimento de todo o texto (notadamente, as trabalhadas nos Capítulos 5, 6, 7 e 14), em situações que envolvem: representação de moléculas (Química), estruturas rígidas (Engenharia), mutações genéticas (Biologia), características de personalidade (Psicologia), relações interpessoais (Ciências Sociais), estrutura sintática de orações (Lingüística), interrelações entre animais predadores e presas (Ecologia), modulações de tons (harmonia musical), alocação de freqüências (para estações de rádio e análogos), jogo de dominó, jogo de xadrez, quebra-cabeças, saídas de labirintos, etc.

Dentre nossas seis referências, [6] é a obra mais completa, reunindo teoria, aplicações e algoritmos de forma brilhantemente didática.

[3] é peculiar e bastante interessante também, chegando a fatos da teoria (sem o “aprofundamento” de [6]) metodologicamente sempre a partir de problemas clássicos (muitos!). Salvo o fato de não enfatizar algoritmos, pode mostrar-se até mais indicada (do que [6]) para alguns leitores, devido ao seu estilo de apresentação e à rapidez com que se pode ter acesso aos referidos problemas em função de seus consagrados títulos estarem explicitados no Índice.

Com certeza, tais consultas farão o leitor compreender ainda melhor, dentro do contexto da Matemática da Escola de 1º/2º Graus, o tema-título deste artigo: ***GRAFOS, POR QUE NÃO ?***

## *REFERÊNCIAS / LEITURAS SUGERIDAS*

**[1]** BRIA**, J.** , *Uma Introdução à Teoria dos Grafos e suas Aplicações* , IV ERMAC - NOVA FRIBURGO (RJ), SBMAC - UERJ/IPRJ - LNCC/CNPq , 1996.

**[2]** CARNEIRO**, V.C.** , *Colorindo Mapas* , RPM, 29, pp.31-35, 1995.

**[3]** CHARTRAND**, G.** , *Introductory Graph Theory.* Dover Publications, New York, 1977.

**[4]** LIMA**, E.L.** , *Alguns Problemas Clássicos sobre Grafos* , RPM, 12 , pp. 36 - 42, 1988.

**[5]** PITOMBEIRA**, J.B.** , *O Problema das Ligações de Água, Luz e Telefone: Uma Aplicação da Fórmula de Euler* . RPM, 11, pp. 09-16, 1987.

**[6]** WILSON**, R.J.,** WATKINS**, J.J.** , *Graphs: An Introductory Approach.* John Wiley & Sons, New York, 1990.