BREVES NOÇÕES DE FILOSOFIA DA MATEMÁTICA

José Roosevelt Dias
Mestre em Matemática - UFF
Professor Adjunto - UFF
jrdias@microlink.com.br

BREVES NOÇÕES DE FILOSOFIA DA MATEMÁTICA

Ao escolher este tema para incluir no *Caderno*, esperamos contribuir para que nossos alunos tomem um primeiro contato com a Filosofia da Matemática. Acreditamos na importância de tal leitura na medida em que trata da natureza da Matemática nos seus múltiplos aspectos e questionamentos. Além de despertar o leitor para o tema, espero que a bibliografia no fim do texto permita que ele possa iniciar a leitura no assunto.

Será abordado o que é denominado *A crise dos Fundamentos* como conteúdo principal, por ser assunto básico e ter originado obras monumentais como os *Principia Mathematica* de Bertrand Russell e A. Whitehead, *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert e *Grundlagen der Arithmetik* de Frege . Além disso, apresentaremos as escolas filosóficas que surgiram ao longo desta crise, na qual vários matemáticos importantes na época defenderam seus pontos de vista .

I. CONSIDERAÇÕES BÁSICAS

A Matemática, dentre muitas aplicações, participa da montagem de modelos para a tecnologia; possibilita o cálculo de trajetórias de planetas, a determinação de órbitas de satélites e a própria quantificação da força de lançamento . No entanto, boa parte dos matemáticos não se envolve com as diversas aplicações da Matemática; trabalha num mundo de conhecimentos aparentemente distante da "realidade", num mundo "ideal", da verdade, como o postulava Platão. A Filosofia da Matemática e a sua Epistemologia parece também não serem consideradas. É bem verdade que fatos importantes já ocorreram na Matemática, indicando que se pode estudar hermeticamente a própria Matemática e obter resultados profundos. Citamos, por exemplo , a descoberta das geometrias não-Euclidianas, que se deu após séculos de análise sobre o quinto postulado de Euclides, e a conjetura de Fermat, hoje o seu "grande teorema", que desenvolveu a princípio a álgebra comutativa e posteriormente partes da geometria algébrica . Mas a Matemática não teria o acervo que hoje detém se não tivesse "um pé na realidade" do mundo físico ou da tecnologia .

Desde os primórdios, a ciência foi se desenvolvendo como instrumento eficaz para descrever o mundo, explicando seus fenômenos. Há aí todo um contexto sobre se é possível tal empreitada, pois questões se põem como a do determinismo e a do que seria o observável. A civilização grega já mantinha esse papel para a ciência, mas foi com a publicação dos Principia de Newton que a ciência pode explicar a realidade objetiva através de inúmeras leis e equações .

Contudo, havia uma demanda de novos estudos, pois o mundo se desenvolvia tecnologicamente e as aplicações exigiam aperfeiçoamentos, seja aumentando a velocidade dos barcos com a mecânica dos fluidos, seja desenvolvendo técnicas de navegação com a ótica, seja utilizando balas de ferro ao invés das de pedra com resultados de balísticas . Newton usava o método de fluxos e considerava que as variáveis x e y fluíam no tempo. Dada uma relação de fluxo, designava por "o" um "acréscimo infinitesimal do tempo" e, considerando as variações, infinitesimais $x + x'o$ de x e a correspondente $y + y'o$ em y, dividia o resultado do fluxo por 'o' e eliminava os termos que contivessem "o", após os cálculos correspondentes . Por exemplo, da relação $f(x,y) = y - ax^2 - bx - c = 0$, obtemos

$$f(x + x'o, y + y'o) = (y+y'o) - ((a(x+x'o)^2 + b(x+x'o) + c) =$$
$$= (y - ax^2 - bx - c) + y'o - 2ax(x'o) - a(x'o)^2 - b(x'o) =$$
$$= y'o - 2ax(x'o) - a(x'o)^2 - b(x'o) .$$

Dividindo pelo fator "o" e eliminando os termos que ainda o contêm , chegamos à igualdade $0 = y' - 2axx' - bx'$. Este processo foi bastante criticado , pois a eliminação de potências superiores de "o" não eram fundamentadas. Não considerava nulo o fator "o" ao dividir mas, após esta operação, "estranhamente" o eliminava .

Com o volume de novos resultados, percebia-se que a Matemática carecia de uma precisão maior que a libertasse de alguns enigmas que feriam a intuição e de fatos que hoje são simples, como a igualdade, mas que não haviam sido demonstrados. Sabia-se apenas que um irracional era aproximado por racionais, de alguma maneira. Uma noção básica como a de curva foi se mostrando fugir à idéia inicial de que "contínuo" era algo "liso" onde sempre se traça tangente. Teoremas que dependiam da noção de continuidade eram demonstrados recorrendo quase que às figuras . Enquanto os matemáticos lidavam com irracionais sem conhecer sua verdadeira natureza , no século XVII, teoremas-chave do cálculo não podiam ser estabelecidos. Por exemplo , a prova de Bolzano-Cauchy do valor intermediário para funções contínuas, dependia de propriedades assumidas como verdadeiras por Cauchy e por Riemann, dentre outros. Um fato tido como verdadeiro era que toda função contínua seria diferenciável salvo em pontos isolados, mas Weierstrass exibiu em Berlim, em 1861, a função abaixo, que é contínua em todo ponto mas não é diferenciável em nenhum deles:

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$ onde a é um inteiro ímpar e b está no interior do intervalo [0,1].

O ano de 1872 culminou com publicações simultâneas da construção dos números reais por Dedekind , Cantor e Heine ,seguidos tempos depois por Weierstrass . Posteriormente ,novos problemas foram surgindo em função da complexidade crescente ao se construir novas curvas e superfícies e do surgimento de novas funções não polinomiais.

Além dos infinitésimos, outro recurso era questionado: o uso das séries. Representava-se uma função por meio de uma série sem que se soubesse se ela fornecia um número (real ou complexo), isto é , se ela convergia como é o caso da função f(x) = 1/(x+1). Seu desenvolvimento em série é 1/(1+x) = 1 - x + x2 - x 3 + ... que para x = 1 a incongruência abaixo (na época sem explicação) gera:

1/2 = 1-1+1-1+...

A integração de uma série era feita termo a termo . Um ponto central nesta questão era o desenvolvimento binomial de Newton cuja série é

$$(1+x)^a = 1 + x\,C(a,1) + x^2 C(a,2) + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C(a,n)\,x^n ,$$

onde $C(a,n) = \dfrac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}$ com $a \in Q$.

O leitor pode verificar que a série 1/(1+x) desenvolvida pelo binômio de Newton para a = -1 , tem como coeficientes

$$C(-1,n) = \frac{(-1-1+1)(-1-2+1)(-1-3+1)\ldots(-1-n+1)}{n!} =$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{n!} = (-1)^n .$$

Porém a condição necessária | x | < 1 para a convergência não foi estabelecida por Newton. Outro aspecto do uso das séries ocorreu com respeito à chamada série de Fourier. No seu livro Théorie Analitique de la Chaleur de 1822 ele percebeu que a representação

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

era possível para uma grande classe de funções. Obtendo a expressão dos coeficientes como sendo

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \ \text{ e } \ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx ,$$

Fourier percebeu que a representação era possível mesmo que a derivada da função f não existisse em muitos pontos . Esta série motivou o desenvolvimento da teoria da convergência de séries não só devido a sua importância em aplicações, como também por ser mais geral do que a série de Taylor, e ainda, porque as séries de potências permitem um tratamento formal no que concerne efetuar operações entre elas, mesmo sem se saber sobre sua convergência, além de serem de melhor manipulação ao derivar e ao integrar .

Nem todos os matemáticos partilhavam da preocupação com os fundamentos da Matemática. Muitos deles não se sentiam motivados para tratá-los, porque, em parte, os experimentos em Física já comprovavam a natureza de um resultado. Isto ocorria, por exemplo, com respeito à equação diferencial do pêndulo. Além disso, muito havia que se fazer nos diversos ramos da Física como Mecânica Celeste, Ótica, Acústica etc. O ponto crítico destes problemas ocorria na concepção de número real, atingindo não só a Análise Matemática mas também a Álgebra. Se esta já usava a revolucionária Teoria de Galois (1830), as álgebras de Clifford e a Teoria dos Ideais, desenvolvidas simultaneamente por Dedekind e Kummer, era forte a presença dos números complexos que também estavam em cheque, pois são definidos a partir dos reais como seu fecho algébrico. Posteriormente, a própria base numérica no nível dos racionais e dos inteiros também foi questionada, pois nem mesmo os naturais estavam caracterizados formalmente. Ora, se a Matemática caminhava para uma espécie de "independência da realidade objetiva" do mundo da experiência e da aplicação, seus alicerces eram constituídos de uma noção empírica de natural , baseada no contar e sem uma contrapartida formal. Este ponto foi levantado brilhantemente por Frege no seu livro Fundamentos da Aritmética. Por exemplo, em Kant, encontramos a justificativa de evidência em igualdades envolvendo naturais. Assim, não haveria necessidade de justificar que 2 + 3 = 5. Mas o que dizer de uma igualdade não evidente como em 132 677 235 + 345 698 232 = 478 375 467 ? Leibniz apresentou uma demonstração que 2 + 2 = 4, usando a definição que 2 é 1 e 1, 3 é 2 e 1 e 4 é 3 e 1. No entanto, observou Frege, faltou destacar a propriedade associativa. Era um retorno à demonstração precisa, ao "espírito euclidiano". Após criticar as diversas tentativas de definir os naturais ou de usá-los em cálculos considerados "evidentes em si mesmos", apresentou a definição destes usando a Teoria dos Conjuntos com a noção de equipotência, que como veremos a seguir trouxe à luz várias questões sobre o infinito nos trabalhos de Cantor.

Há tantos pontos na reta quantos no plano. Este fato foi uma surpresa para o próprio Cantor que o descobriu ao tentar caracterizar o conceito de dimensão como cópias de **R**. A noção de função já vinha sendo construída desde Leibniz que considerava função uma quantidade associada a uma curva como a inclinação ou o raio de curvatura. Rapidamente o par conjunto e função foram permitindo expressar fenômenos matemáticos importantes. A correspondência bijetiva foi usada na definição de conjuntos equipotentes. Um conjunto é enumerável se existe uma bijeção entre ele e os naturais (dizemos também que é equipotente aos naturais). É infinito se for equipotente a um subconjunto próprio; assim os naturais formam um conjunto infinito, pois é equipotente ao conjunto dos naturais pares. Dos resultados obtidos por Cantor, que causaram grande impacto no início da sua teoria, destacamos a afirmação de que os racionais são enumeráveis. Isto surpreende, pois eles formam um conjunto denso (entre dois racionais existem infinitos deles). Outro resultado contundente é que os números algébricos formam um conjunto enumerável (um número é algébrico se for raiz de um polinômio de coeficientes racionais ; por exemplo, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é algébrico por ser raiz do polinômio $f(x) = x^4 - 10x + 1$). No entanto, mostrar que há várias ordens de infinito foi um marco obtido por Cantor e ele o conseguiu ao mostrar que o intervalo [0,1] é um conjunto não enumerável. A demonstração de Cantor usa o método de diagonalização que veremos abaixo:

Suponha a possibilidade de enumerar os elementos de [0,1], digamos, na forma $x_1, x_2, x_3, \ldots$ Podemos considerar que cada tal elemento é um decimal. Ponhamos

$x_1 = 0,a_{11}a_{12}\,a_{13} \ldots$
$x_2 = 0,\ a_{21}a_{22}\,a_{23} \ldots$
$x_3 = 0,\ a_{31}a_{32}\,a_{33} \ldots$ etc.

onde cada número aij (i , j percorrendo os naturais) é um dos dígitos 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Vamos exibir um número distinto de todos eles e localizado no intervalo [0,1]. Para isto, construa o número $y = 0, y_1 y_2 y_3 \ldots$ de tal forma que $y_1 \neq a_{11}$, o que implica ser distinto de x_1, a seguir o número $y_2 \neq a_{22}$, que o faz diferir de x_2, e assim por diante. Teremos $y \neq x_i$ para todo i, pois o dígito de ordem i de y difere de a_{ii}.

Em meados do século XIX surge uma forma de lógica de caráter algébrico cujas bases são creditadas a George Boole (1815-1864). O propósito era deslocar a lógica da metafísica, de onde havia se originado a partir de Arquimedes, e aproximá-la da Matemática. Para isto, esta deveria lidar com variáveis representando também sentenças e não apenas números e grandezas. Boole comparava a Lógica à Geometria, "pois ambas são assentadas em verdades axiomáticas e seus teoremas são construídos segundo a teoria geral do simbolismo, que é aquilo que é reconhecido como Análise ".

No seu livro Investigações das Leis do Pensamento (1854), Boole usou letras romanas x , y , z , ... para designar entidades como números, pontos e idéias, unificados por abstrações e submetidas a operações apropriadas. Seu método foi interpretar as identidades algébrico-aritméticas (associatividade, distributividade etc.) à luz da Lógica, portanto numa álgebra abstrata no sentido de que não lidava com números nem grandezas. As operações x+y e xy podem ser interpretadas como união ou disjunção e interseção ou conjunção. No entanto, na Lógica é válida a lei $x^n = x$, o que levou Boole a considerar somente os valores 0 e 1. Seu projeto esbarrou em problemas de transposição como é o caso do uso não exclusivo da conjunção "ou" , mas teve o mérito de introduzir outras possibilidades na Matemática além do número e do contínuo, contribuindo para o surgimento da chamada "matemática pura".

II. O SURGIMENTO DAS ESCOLAS

Num congresso em 1900, Hilbert apresentou vinte e três problemas que segundo ele iriam ocupar boa parte da pesquisa futura ([8] p. 448). Alguns deles estavam relacionados com os fundamentos da Matemática. Neste congresso Poincaré leu críticas aos trabalhos de Cantor. Desta controvérsia surgiram as escolas filosóficas. Porém, elas não se contrapunham em todos os itens de posições e nem todo matemático admitiu uma posição estrita. As propostas de fundamentação foram três: logicismo, formalismo e intuicionismo, mas existem outras concepções da Filosofia da Matemática.

Vamos no entanto apresentar a seguir alguns tópicos que motivaram pesquisas e publicações, constituindo o cerne da chamada *crise dos fundamentos*.

A geometria

Alguns matemáticos tinham direcionado seus estudos de geometria no sentido da axiomatização. Negando o quinto postulado de Euclides eles montaram uma geometria do espaço com propriedades diferente da euclidiana. Um deles, Bolyai, demonstrou primeiramente uma série de teoremas, sem o uso do 5° postulado denominando esta geometria de *absoluta*, já que não havia conflito entre ela e a euclidiana. Na mesma época, em localidades distintas, Bolyai e Lobachevski substituíram o 5° postulado de Euclides pelo axioma que admitia mais de uma paralela por um ponto fora de uma reta, formando a chamada *geometria hiperbólica*. A geometria já se tornara então uma teoria matemática dependente do grupo de axiomas que se considerasse e não mais unicamente a euclidiana.

Riemann, por sua vez, apresentou uma geometria que diferia da de Euclides por não admitir reta infinita nem tampouco paralela por um ponto externo a uma reta. Este avanço na geometria só foi possível com a conclusão de que o axioma das paralelas (o chamado quinto postulado de Euclides) era independente dos outros. Este estudo é puramente axiomático e pertence à fundamentação da Matemática.

Posteriormente, Hilbert reformulou a geometria euclidiana, observando que esta era imprecisa e continha demonstrações que pressupunha hipóteses não explicitadas como, por exemplo, a reta ser infinita. Além disso, era lacônica no que concerne à continuidade.

A não unicidade da geometria, que agora já não era a geometria do universo nem a divina, repercutiu profundamente na filosofia e na ciência. A relação da Matemática com a realidade sofreu grande abalo. Evidenciou-se o aspecto axiomático, onde são formulados axiomas constituindo uma estrutura ou espaço matemático e, a partir deles, são deduzidos teoremas. Sob este ângulo, a Matemática se resumia a um compromisso apenas com a coerência, pensava Hilbert. A elaboração de sistemas matemáticos era de aparência arbitrária; apenas não se podia infringir suas próprias regras, como num jogo.

A aritmetização da análise

Já estando claro que o conceito de continuidade e diversas propriedades dos números reais se interligavam, buscou-se explicitar tal relacionamento. Num sentido, os reais foram apresentados numa reta sem buracos (os cortes de Dedekind). Este caminho era ao mesmo tempo o da ordenação, com propriedades sobre o ínfimo e supremo. Por outro lado, levou-se em conta que um número real sempre seria o limite de uma seqüência de racionais (como o fizeram Cantor e Cauchy com as seqüências fundamentais atualmente denominadas seqüências de Cauchy). O conjunto dos reais seria a extensão dos racionais, tornando-se completo, pois nele toda seqüência que se acumulasse em intervalos arbitrariamente pequenos seria convergente.

Teoria dos conjuntos

A ênfase a agrupamentos arbitrários de pontos já constava em Descartes ao propor a geometria analítica. Com Cantor, surgiu o uso sistemático de conjunto como objeto matemático e como figuras arbitrárias. No entanto, vários paradoxos foram descobertos. Ele próprio já tinha observado que a construção do *conjunto de todos os conjuntos* contradizia seu teorema, que garantia que um conjunto tem menor potência que o conjunto de suas partes. Assim, era incoerente conceber o conjunto de todos os conjuntos (pois ele teria também a maior potência).

Outros paradoxos foram apresentados. Um deles provocou a axiomatização dos conjuntos, por ser básico: Não podemos formar o "conjunto de todos os conjuntos que pertencem a si próprios ", pois não podemos decidir se ele pertence ou não a si próprio (antinomia de Russell).

O conceito de número

Um dos matemáticos que contribuíram para os fundamentos da Matemática foi Peano, apresentando axiomas para o sistema dos naturais que seria obtido a partir apenas das noções de número, sucessor e indutivo. Seu texto se resumia a descrever os naturais, sem os conceituar. Posteriormente, Frege publicou o que seria o conceito de número natural. Neste empreendimento usou a noção de "equinumérico" de Cantor, isto é, a potência de conjunto. Quando sua obra, bastante profunda e detalhada, estava para ser impressa, recebeu uma carta de Russell mostrando que seu método levava a incoerência. Para isso, Russell apresentou um conjunto que não permitia concluir se um objeto era ou não seu elemento, como já comentamos. Tendo Russell contornado a questão com a teoria dos tipos, o próprio trabalho de Frege serviu de base para a tese *logicista*: a Matemática é lógico-dependente, como veremos mais adiante.

O infinito

Num artigo interessante, Hilbert discutiu as várias formas do infinito: o denso, o ilimitado e o infinitamente pequeno. Há ainda, uma diferença entre o Infinito Potencial e o Infinito Atual. Dado um natural n, é admitido que existe um natural m que o supera em grandeza, ou seja, m é um natural tal que m > n. Concebemos aqui que os naturais constituem uma totalidade *ilimitada*. No entanto, formulando propriedades de uma totalidade infinita estaremos considerando um objeto "infinito" como objeto matemático. Estamos admitindo o uso do *infinito atual*. Outro exemplo seria considerar um círculo máximo numa esfera e percorrelo. Evidentemente podemos fazer isto o número de vezes que quisermos. Neste sentido, o circulo é um caminho *ilimitado* sem ser no entanto *infinito*. Mas o uso sistemático do infinito atual na Matemática provocou reações de várias origens. Sua consideração mais freqüente e sua importância deveram-se ao desenvolvimento da teoria dos conjuntos. A concepção de real como uma seqüência genérica de racionais, sem se ter noção de sua construção, não foi aceita por Brouwer, que liderou um pensamento da filosofia da Matemática denominado *intuicionismo*. Às suas críticas somavam-se as de Poincaré e de Kronecker, dentre outros.

III. AS ESCOLAS FILOSÓFICAS

Vemos a filosofia como uma explanação que visa a organizar uma desordem num ramo do conhecimento. Discute seus rumos e analisa suas crises.

Ao lidar com a Matemática, podemos nos mover em duas direções: uma, no sentido da sua construção, adicionando resultados, apresentando novas estruturas, novos aspectos, indo no sentido que usualmente se concebe como "construir a Matemática"; a outra, indo no sentido oposto ao anterior, quando nos dirigimos aos seus princípios básicos, seus primórdios, seus fundamentos, tentando, de maneira crítica, "elaborar " matematicamente ou logicamente o que é "senso comum". Esta atividade envolve principalmente Teoria dos Conjuntos e Lógica.

Logicismo

O logicismo sustenta que as leis da Matemática são *redutíveis* às leis lógicas ou são derivadas da Lógica. Da Lógica viria o fascínio, o rigor e a exatidão. Os gregos já viam a semelhança entre Matemática e Lógica. Cabe registrar que Leibniz já visualizava a Lógica como uma ciência abrangendo os princípios e as idéias sobrejacentes a todas as outras. Quem traduziu de forma concreta a interpretação lógica da Matemática foi Gottlob FREGE. Para ele a Matemática era por si mesma racionalidade, uma parte da razão. O fato da sua análise se passava na Aritmética, que é a base da Matemática clássica.

A *tese* do logicismo foi defendida nos *Principia Mathematica* por WHITEHEAD e Bertrand RUSSELL, influenciado pelos "Fundamentos da Aritmética" de Gottlob FREGE.

Para nos localizarmos no conteúdo da tese logicista, nos reportemos a dois pontos. Primeiro, para WHITEHEAD e RUSSELL os termos *conjunto* e *par ordenado*, assim como as leis relativas a eles, eram tidas como pertencentes à Lógica e não como parte da Matemática. Hoje, naturalmente, a visão já é outra, mesmo por parte dos matemáticos. Em segundo lugar, e aí é que o ponto crucial, o logicismo partia da origem lógica da Aritmética, em contraste com outras concepções sobre o conceito de número. Por exemplo, para os normalistas os números eram idéias da nossa mente: algo que surge num instante, dura algum tempo e depois cessa. Não é pois uma entidade abstrata como a entendemos. Para eles, então, há tantos zeros diferentes quantas são as pessoas que têm idéia de zero.

Frege faz crítica ao que se pretende considerar sob o conceito de número. Este ataque a uma noção tida como básica na Matemática indica uma desordem na sua base, nos seus fundamentos. A aritmética, diz ele, sofre de uma frouxidão oriunda dos hindus. Enquanto a geometria de Euclides é elaborada segundo definições e demonstrações, por vezes até de afirmações que não lhes seria exigida, a aritmética se apodera de um objeto sem defini-lo. Número, diz Frege, não é atributo de objeto, mas sim de um conceito. "se designarmos por um cada um dos objetos a enumerar erramos visto que coisas diferentes recebem o mesmo sinal. Se provermos o 1 de traços distintivos (1´, 1´´,...) torna-se inutilizável pela Aritmética. A linguagem comum atribui por vezes números a conceitos como em "cinco homens" mas também a objetos: o número de maçãs "parecendo querer falar de objetos, quando na verdade quer-se enunciar algo de conceito". Um trio de homens é uma instância do número 3 e 3 é uma instância de número. Mas o trio não é um número. Uma pluralidade não é uma instância de número mas de um número determinado.

Finalmente conclui com a definição de *equinumérico*, que é a noção de cardinal obtida com bijeções. *Número* então seria a extensão do conceito de equinumérico. Da concepção logicista de número, decorre a construção paulatina de outras instâncias de números (inteiros, racionais, reais e complexos). O contínuo é apresentado através dos reais, sobre os quais repousa a Análise.

A identificação das coordenadas tridimensionais com ternos de números reais colocou a Geometria como dependente da Lógica, através da Geometria Analítica. Este fato, conseqüência do trabalho de Frege, acrescido da *aritmetização da análise*, formaram a estratégia de Russell e Whitehead para formularem uma tese que fundou a chamada *Escola Logicista.* A tese logicista é de que *a Matemática é redutível à Lógica*, logo, nada mais é do que uma parte dela. Esta tese pode ser dividida em duas partes: 1) Os *conceitos da Matemática* podem ser derivados dos conceitos lógicos através de definições explícitas e 2) Os *Teoremas da Matemática* podem ser derivados de axiomas lógicos através de pura dedução lógica.

Os maiores problemas encontrados por Russell ocorreram na Teoria dos Conjuntos. Para eliminar os paradoxos, ele elaborou uma *Teoria dos Tipos.* Ao Tipo 0 pertencem os nomes dos objetos (indivíduos) do universo de discurso: a, b, c etc., ao Tipo 1, as propriedades destes objetos: f(a), g(a), h(b) etc., ao Tipo 2, as propriedades das propriedades destes objetos: F(f), G(f), H(g) etc.

O cálculo da teoria dos tipos contém uma hierarquia enumerável de níveis de variáveis e suas únicas fórmulas atômicas são: "...$\in$ —" e "... = —". Na primeira fórmula é exigido que os níveis difiram por uma unidade. Assim, x $\in$ y significa que se x é do nível n então y é do nível n+1, isto é, $x^n \in y^{n+1}$. Por outro lado, $x^i = y^j$ se, e só se, i = j. Assim, podemos formar o conjunto dos reais positivos, mas não tem sentido enunciar: o conjunto de todos os conjuntos pois estão no mesmo nível. Vemos que a antinomia de RUSSELL não mais ocorre. Para ver que também a de Cantor não é possível neste cálculo, considere então o conjunto U de todos os conjuntos. Notando que cada formulação é submetida a um nível i, devemos rescrever isto como $x^i\,(x^i \in U)$ e desta forma, U deve pertencer ao nível i+1. Pelo axioma de compreensão, onde tomamos $\varphi\,(x^i)$ como sendo $x^i = x^i$, existe um tal conjunto U^i. O conjunto U^{i+2} é a potência do conjunto U^{i+1}.

Outros pontos a serem contornados foram os axiomas do infinito e o da escolha. Mas como observou Russell eles são questionáveis por serem de existência. O primeiro garante que dado um natural sempre há um que lhe supera em grandeza. O da escolha garante a existência de um conjunto onde não se conhece a natureza dos seus elementos. Quanto a isto, denotando por I e C, respectivamente, os axiomas do infinito e o da escolha, Russell apresentou a formulação axiomática: $I \Rightarrow S$ para um teorema S que dependesse do axioma do infinito (isto é, S é válido se o axioma do infinito o for), o mesmo se passando com respeito ao axioma da escolha: $C \Rightarrow S$. Seu argumento foi o de que à Lógica não caberia afirmar sobre a existência categórica.

Outra dificuldade dos formalistas ocorre na definição de número real. Para eles um número real é uma propriedade de conjuntos de racionais. Por exemplo, $\sqrt{2}$ é definido como a classe de todos os racionais positivos cujo quadrado é maior que 2. Torna-se necessário então se referir à ordem dos reais que se esteja considerando: temos "a coleção de todos os reais de tipo tal" ao invés de a coleção de todos os reais. Mas há outros inconvenientes na Teoria dos Tipos:

Cardinais: há o inconveniente de que cada um se refere ao seu nível correspondente.

Universo: cada nível tem a sua classe (quase) universal.

Classe vazia: também cada nível tem a sua .

Complemento: é um (quase) complemento pois ocorre em cada nível.

Fórmulas simétricas: as fórmulas $x \in y$ e $y \in x$ existem em separado mas não podemos compor a sentença $((x \in y) \wedge (y \in x))$.

Sobre os reais, o corte envolve a formulação de conjuntos de conjuntos.

Há seguidores ilustres do logicismo como Wittgenstein, Carnap, Quine e hoje tenta-se no logicismo contornar o uso de idéias matemáticas como *iteração* e *redução*.

Intuicionismo

A tese intuicionista é baseada na construção da Matemática a partir dos números naturais considerados como uma idéia *intuitiva*. Ela admite que a série dos naturais 1,2,3,... faz parte do senso comum e afirma que a Matemática não é uma teoria, um sistema de regras e afirmações, mas *uma parte fundamental da atividade humana*. Esta escola teve como maior defensor o matemático holandês L. Brouwer, que liderou uma revisão rígida de conceitos como "existência", "prova" e "objeto matemático".

O principal problema da fundamentação da Matemática era fazer uma ponte entre o discreto e o contínuo, ou seja, entre a Aritmética e a Geometria. Para os intuicionistas, o discreto e o contínuo seguiam lado a lado e nenhum se fundamentava sobre o outro.

O uso indiscriminado do infinito e da prova por absurdo motivaram os fundadores do *intuicionismo* a apresentarem o que considerariam legítimo em Matemática. Um conjunto, por exemplo, só devia ser considerado se cada elemento pudesse ser construído passo a passo por uma lei. O axioma da escolha não era, portanto, aceito na sua generalidade por esta escola. Trata-se de um axioma de caráter existencial, mas que não fornece a construção da seleção.

A lei do terceiro excluído também não era aceita pelos intuicionistas, salvo para conjuntos finitos. Para eles, uma afirmação pode ter uma e só uma das três possibilidades: verdadeira, falsa ou indecidível. Por exemplo, considere as três afirmações a seguir:

1) $2^n + 1$ é um número primo.
2) Existe um terno x, y e z de números naturais tais que $x^{n+2} + y^{n+2} = z^{n+2}$.
3) Se p é primo, existe um primo q maior que p.

A primeira sentença pode ser verificada para cada número natural. Mesmo que o teste seja longo, o mesmo será feito e a afirmação para tal n será falsa ou verdadeira. Para a segunda, o mesmo não ocorre pois dado um n teremos de verificar a afirmação para possivelmente infinitos ternos. Aqui os intuicionistas consideram que o problema é indecidível pois não há uma forma de construção dos ternos. O infinito não é a questão única pois em 3) temos infinitos primos mas existe uma forma efetiva de construir o próximo primo. Neste caso o problema é decidível.

Uma questão deve ser formulada aos intuicionistas: o que se manteria agora a curto prazo na Matemática se forem usados somente processos que satisfazem às suas exigências?

Formalismo

Os *formalistas* consideram a Matemática como o estudo dos sistemas de axiomas acrescidos de leis lógicas. A Matemática, então, repousa na questão fundamental da consistência, ou seja, no fato de que num sistema não se pode provar uma proposição e ao mesmo tempo sua negação.

Após a aritmetização da Análise e da fundamentação Aritmética feita por Frege e antecedida pela listagem dos axiomas aritméticos de Peano (que *caracterizou* mas *não conceituou* o número), restava apenas fundamentar a Geometria. Esta era assentada na euclidiana, que continha muitas falhas e imprecisões. Com esta visão, Hilbert reestruturou a Geometria euclidiana mantendo a base axiomática, pois observara que temos de partir de termos não definidos, usando neste caso o ponto, a reta e o plano como tais. Também destacou seis relações não definidas: *estar sobre*, *estar entre*, *congruência*, *continuidade* e *paralelismo*, transformando a Geometria euclidiana de inspiração empírica numa *geometria de relações.*

Levando ainda em conta as novas geometrias não euclidianas, a hiperbólica e a elíptica, se posicionou sobre a natureza da Matemática, fundando uma escola filosófica. Hilbert propôs a concepção formalista da Matemática, elaborando seu *programa*, após a publicação do seu *Grundlagen der Geometrie* em 1899.

A Matemática formalista tem um ar de vazio, de arbitrário, pois a existência e a verdade física não a envolvem. Os estudos neste sentido levam a comparar modelos. Por exemplo, o surgimento das geometrias Não-Euclidianas destruiu concepções arraigadas de que a Geometria Euclidiana era a Geometria do universo. Afinal, Newton a usava na sua cosmologia (seu modelo físico do universo). Surgiram vários modelos para as novas geometrias, como o de Poincaré para a geometria Hiperbólica. Os estudos comparativos, neste caso, mostraram que a Geometria Não-Euclidiana seria consistente se a Geometria Euclidiana o fosse. Buscou-se a Aritmética, tida como inquestionável, para estudar a consistência das geometrias. No entanto, o método comparativo de modelos não podia ser aplicado neste caso, pois não existia teoria mais simples na qual se pudesse construir um modelo apropriado correspondente. Traduzindo o problema de provar a consistência da Aritmética para uma situação abstrata, Hilbert construiu modelos através de situações formais, criando a *Teoria da Demonstração* em *Grundlagen der Mathematik*, livro que correspondeu ao *Principia Mathematica* do logicismo. No entanto, a tese ruiu com a prova de Kurt GODEL de que o sistema de Hilbert não era completo pois que nele havia afirmações indecidíveis (isto é, afirmações que não se pode decidir se são falsas ou se são verdadeiras), e a consistência do sistema era uma delas.

III. COMENTÁRIOS FINAIS

Podemos dizer que as escolas consideravam válidas boa parte de técnicas abstratas da própria teoria dos conjuntos. Porém, divergem quanto à intensidade ou à legitimidade de algumas. Quando do surgimento dos paradoxos, as críticas à teoria dos conjuntos foram distintas. Brouwer declarou que a concepção estava errada desde o início, que se transferia a manipulação de conceitos de objetos finitos para o infinito. Era o uso abusivo do infinito. Já Russell acreditava numa reconstrução da teoria que pudesse eliminar o que considerava a origem de tudo: o círculo vicioso.

Como já fizemos referência, o matemático pode subsistir num mundo hermético abstrato fazendo Matemática pela Matemática. Neste sentido, ele faz uso exatamente de várias concepções criadas ao longo da sedimentação dos fundamentos. Como Platão, ele acredita numa evolução pela prática racional e vive no mundo da idéias, que é um mundo sem representação na realidade objetiva. A esta atitude de acreditar que os objetos matemáticos existem e são palpáveis pela mente, costuma-se denominar de Platonista. Um platonista está convencido de que para cada condição bem definida existe, em geral, um conjunto ou classe que compreende todas as entidades que a satisfazem. O cálculo usado é o chamado cálculo ideal e a teoria dos conjuntos envolvida é a teoria intuitiva dos conjuntos que constitui, segundo Hilbert, o paraíso criado por Cantor. Simpatizantes do Platonismo, como Kurt GODEL, formulam pontos de vista sobre suas concepções quanto à Matemática. Citemos um trecho:

“Malgrado seu distanciamento da experiência dos sentidos, temos algo como que uma percepção também de objetos da teoria dos conjuntos como se depreende do fato de que os axiomas se impõem à nós como verdadeiros. Não vejo nenhuma razão por que deveríamos ter menos confiança neste tipo de percepção, isto é, na intuição matemática, do que na percepção dos sentidos. Esses objetos podem também representar um aspecto da realidade objetiva”**.**

René THOM também é simpatizante destas idéias e num outro aspecto diz: “as formas matemáticas têm uma existência que é independente da mente que as contempla. No entanto, a qualquer momento, os matemáticos têm somente uma visão incompleta e fragmentária deste mundo das idéias”.

Vários campos da fundamentação constituem hoje objeto de pesquisa nas mais variadas áreas, como a teoria da prova de Hilbert. A teoria dos conjuntos é outro vasto campo de estudos. Praticamente todas as áreas da matemática se beneficiam de resultados da teoria dos conjuntos e outras, como a topologia geral, dela surgiram. Embora a teoria quântica tenha mostrado que “a natureza dá saltos” contrariando o conceito de *continuum* desenvolvido na Matemática, a eliminação pura e simples do infinito na Matemática “iria ser uma perda intelectual irreparável”, como se posicionou Hilbert. Na verdade, o que compôs as divergências foram exigências em se lidar com objetos “construídos”. No entanto, o uso da teoria dos conjuntos “no cotidiano” da Matemática compreende a teoria intuitiva dos conjuntos, onde “tudo é permitido”, desde formar conjuntos arbitrariamente até lidar com aritmética transfinita e conjuntos inacessíveis, universos, onde novamente o que se prioriza é a idéia e não a legitimidade.

Grosso modo, a Filosofia da Matemática tem como sub-áreas a existência de objetos matemáticos e a verdade Matemática. Não podemos dizer que a Matemática está em crise, mas sua fundamentação ainda é incompleta. Por exemplo, não há uma teoria axiomática dos conjuntos que seja satisfatória. Há diversas em uso, a primeira tendo sido formulada por Zermelo junto com Fraenkel, que praticamente todo matemático usa. Num processo similar ao caso da Geometria euclidiana, temos hoje a Teoria dos Conjuntos não–cantoriana, onde não vale a hipótese do contínuo. O método de apresentar tal modelo permitiu já utilização em outras áreas de pesquisa, tornando-o não propriamente “legítimo”, mas “eficiente”.

Esperamos poder tratar mais uma vez deste tema e advertimos novamente o leitor que a Filosofia da Matemática é um vasto campo, que continua à margem do interesse da maioria dos matemáticos.

Bibliografia

[1] **WILDER** , *Raymond L.* , Evolution of Mathematical Concepts. An Elementary Study, John Wiley & Sons, INC 1968

[2] **BENACERRAF, P. / PUTNAM, H.**, *Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press, 1985

[3] **FRAENKEL / LEVY**, *Foundations of Set Theory*, North-Holland Co., 1973

[4] **RUSSEL**, Bertrand, *Introdução à filosofia da Matemática*, Zahar Editores, 1974

[5] **STOLL**, Robert, *Set Theory and Logic*, W. Freeman and Co., 1963

[6] **TARSKI**, Alfred, *Introduction to Logic*, Oxford Press, 1965

[7] **HOWARD**, Eves, *Introdução à História da Matemática*, Editora Unicamp, 1995

[8] **BOYER** Carl, *História da Matemática*, editora Edgard Blücher Ltda., 1974

[9] **EDWARDS, C**. , *The Historical Development of the Calculus*, Springer-verlag, 1982

[10] **PEIRCE / FREGE, G**., *Coleção Os Pensadores*, Abril Cultural, 1980

[11] **BARKER**, Stephen F., *Filosofia da Matemática*, Zahar Editores, 1976

[12] **DAVIS**, Philip; HERSH, Reuben, *A Experiência Matemática*, Francisco Alves, 1985