TÓPICOS EM TOPOLOGIA INTUITIVA

AGNALDO DA CONCEIÇÃO ESQUINCALHA

Faculdade de Educação
Universidade Federal do Rio de Janeiro
aesquincalha@yahoo.com.br

***Resumo**: O texto apresenta um estudo inicial sobre Topologia, feito sob um ponto vista intuitivo e transdisciplinar, mostrando que vários conceitos topolópicos fazem parte do cotidiano popular. Alguns problemas clássicos e um pouco da história da Topologia são apresentados, assim como sua ligação com outras áreas do conhecimento. Por fim, o texto apresenta alguns problemas com o intuito de despertar o interesse do leitor para a Topologia Intuitiva.*

***Palavras-chave:** Topologia Intuitiva, História da Topologia, Problemas Clássicos e Elementares em Topologia.*

***Abstract:** This paper presents an initial study on Topology done under an intuitive and transdisciplinar view, showing that several topological concepts are part of the daily popular. Some classic problems and a little of Topology's History is introduced, as well its connection with other areas of knowledge. Finally, this paper presents some problems in order to arouse the readers' interest for Intuitive Topology.*

***Key words:** Intuitive Topology, Topology's History, Classic and elementary problems on Topology.*

1. INTRODUÇÃO

Do grego *topos* – forma e *logos* – estudo, Topologia significa "estudo das formas". Segundo COURANT e ROBBINS (2000) a Topologia tem como objeto o estudo das propriedades de figuras geométricas que persistem mesmo quando as figuras são submetidas a deformações tão drásticas que todas as suas propriedades métricas e projetivas são perdidas. Em outras palavras, pode-se dizer que a Topologia é o ramo da Matemática que se dedica ao estudo das influências mais profundas da noção de continuidade, noção esta que aparece com grande freqüência em diversas outras áreas da Matemática, levando a Topologia a ser considerada como um de seus pilares. A Topologia tem suas raízes em aplicações nas mais diversas áreas, com muitos de seus resultados descobertos por meio de procedimentos intuitivos, que mais tarde foram formalizados pelo rigor matemático. A história mostra que grandes teorias matemáticas foram e são construídas na tentativa de se solucionar algum problema, e com a Topologia não foi diferente.

2. HISTÓRICO E ALGUNS CONCEITOS ELEMENTARES EM TOPOLOGIA

O célebre problema das sete pontes de Königsberg, cidade da antiga Prússia, hoje Kaliningrado e Rússia, respectivamente, é considerado como o problema que fomentou o surgimento da Topologia.

Na parte central de Königsberg, o rio Pregel se divide em dois, chamados de rio Pregel Velho, ao norte, e rio Pregel Novo, ao sul, dividindo a cidade em quatro porções de terra. Para ligar essas porções de terra, foram instaladas sete pontes, como pode ser visto na figura 1. Os habitantes do local lançaram o desafio de se fazer um passeio pela cidade atravessando as sete pontes, cada uma, uma única vez. Este problema já havia se tornado célebre popularmente quando o matemático suíço Leonhard Euler, em 1736, percebeu que o problema não era de Geometria, como se pensava, uma vez que as distâncias envolvidas eram irrelevantes, mas importava a maneira como as porções de terra estavam interligadas entre si. Assim, nasceram a Topologia e a Teoria dos Grafos – Euler estabeleceu um grafo[1], possivelmente o primeiro da história, representando as porções de terra e as pontes como vértices e arestas, respectivamente, preocupando-se com a forma com que os vértices eram ligados, como já foi dito.

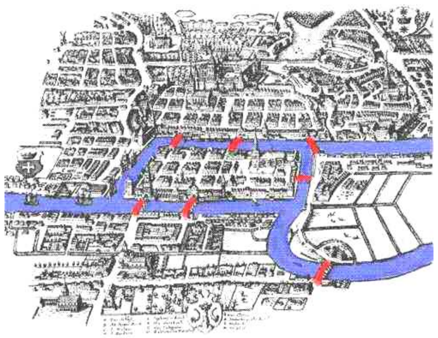

Figura 1 – As sete pontes de Königsberg.

A partir do grafo, Euler percebeu que a única maneira de se atravessar o caminho inteiro passando uma única vez em cada ponte (aresta) seria se houvesse no máximo dois vértices de onde saia um número ímpar de caminhos. De fato, para cada vértice deve haver um número par de caminhos, pois é necessário um caminho para entrar e

[1] Um grafo é uma figura constituída de um número finito de arcos ou arestas, cujas extremidades são chamadas de nós ou vértices.

outro para sair. Os dois vértices com caminhos ímpares referem-se ao início e ao final do percurso, pois estes não precisam de um para entrar e um para sair, respectivamente. Assim, Euler chegou a conclusão de que, como foi configurado, o problema das sete pontes de Königsberg não tinha solução, uma vez que todos os vértices estão associados a um número ímpar de caminhos, o que pode ser verificado na figura abaixo, onde as porções de terra são representadas por letras maiúsculas e as pontes por letras minúsculas.

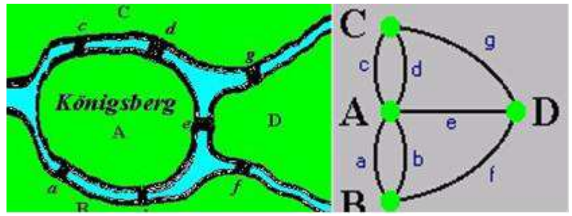

Figura 2 – O problema e seu grafo.

Apesar do surgimento das idéias em Topologia ser atribuído a Euler e ao problema das Pontes de Königsberg, quase um século antes o matemático francês René Descartes, por volta de 1639, já sabia que se um poliedro tem V vértices, F faces e A arestas, vale a equação $V - A + F = 2$, relação mais tarde conhecida como Característica de Euler, que publicou sua demonstração em 1751. Ainda no século XVIII outras contribuições à Topologia foram feitas pelo francês Augustin Louis Cauchy e pelo alemão Johann Carl Friedrich Gauss, que também perceberam propriedades de forma mais abstratas do que as descritas pela Geometria.

Na história da Topologia, dois alunos de Gauss têm extrema importância, são eles Johan Listing e August Möbius. Listing foi o responsável pela primeira aparição da palavra Topologia numa publicação científica, num artigo denominado *Vorstudien zur*

Topologie, que tratava sobre o estudo dos nós[2]. Já Möbius foi o responsável pela definição precisa do conceito de transformação topológica, que deu identidade a Topologia como sendo o ramo da Matemática que estuda as propriedades das figuras que permanecem invariantes face a tais transformações.

Segundo DEVLIN (2004), uma transformação topológica é uma transformação de uma figura numa outra de tal maneira que dois quaisquer pontos que se encontram juntos na figura original permanecem juntos na figura transformada. Neste texto, o conceito de superfície utilizado é o mesmo que em SAMPAIO (2004), onde fica subentendido que superfície é um "ambiente" geométrico bidimensional, no sentido de que "habitantes" fictícios de uma superfície se movem com apenas dois graus de liberdade.

Idéias básicas da Topologia são tão cotidianas que desde a infância todos têm noção de exterior, interior, frente, trás, direita e esquerda, por exemplo. Os dois graus de liberdade citados no parágrafo anterior referem-se à propriedade de que um ponto sobre uma superfície pode mover-se "para frente-trás", "para a direita-esquerda", mas não pode mover-se "para cima-baixo".

A Topologia bidimensional é muitas vezes chamada de "Geometria da Folha de Borracha". Para explicar este sugestivo nome, costuma ser utilizado o mapa do metrô de Londres, Inglaterra. O mapa foi desenhado em 1931, pelo desenhista técnico Henry Beck, e justifica claramente o apelido dado à Topologia em duas dimensões. Comparando o mapa à realidade, percebe-se que escala, direções e sentidos estão errados, e que só se preservam duas características: (1) se uma estação é mostrada ao norte, ou ao sul, do Rio Tâmisa, então é porque realmente está ao norte, ou ao sul, do Rio Tâmisa, e (2) a ordem das estações em cada linha e as estações onde duas linhas quaisquer se cruzam, o que de fato, são as únicas informações que interessam aos passageiros. A justificativa é a seguinte, se este mapa do metrô fosse impresso numa folha de borracha perfeitamente elástica, poderia ser esticado e comprimido de

[2] Mais adiante será visto que os nós apresentam padrões topológicos.

modo com que cada detalhe ficasse correto, implicando num mapa geograficamente preciso.

DEVLIN (2004), sobre o surgimento da Topologia, afirma que a idéia era desenvolver uma Geometria que estudasse as propriedades das figuras que não são destruídas por deformações contínuas e, portanto, não dependem de noções como linhas retas, círculos, cubos e assim por diante, ou de medidas de comprimento, área, volume ou ângulo.

De acordo com SAMPAIO (2004), define-se como topologia de uma superfície o conjunto de aspectos geométricos dessa superfície que não se alteram quando a ela é aplicada qualquer uma das seguintes deformações[3]: (1) esticar ou inflar a superfície, (2) encolher a superfície ou partes dela, (3) entortar a superfície ou partes dela, e (4) cortar a superfície segundo uma linha suave nela demarcada e, posteriormente, colar novamente, uma na outra, as bordas geradas por esse recorte, resgatando a superfície original com a linha demarcada. Quando duas superfícies têm a mesma topologia, diz-se que elas são topologicamente equivalentes, ou que são superfícies homeomorfas. O conjunto de aspectos geométricos que se alteram quando aplicada alguma das deformações citadas acima é denominado geometria da superfície.

Algumas superfícies são definidas de modo abstrato a partir de colagens estratégicas de pares de arestas de regiões poligonais planas. Isto significa que, após a colagem, os já citados habitantes fictícios e bi-dimensionais dessa superfície, ao cruzar, por exemplo, a aresta[4] superior, emergem para dentro da superfície por meio da aresta inferior. De modo análogo para as arestas da esquerda e da direita. A seguir são apresentados alguns exemplos dessas superfícies assim como seus diagramas planos.

O primeiro exemplo é o toro. Para sua construção, a região poligonal plana que será tomada como ponto de partida é o retângulo. Para produzir o toro plano, colam-se as arestas opostas do retângulo,

[3] Intuitivamente falando, de acordo com SAMPAIO (2004).
[4] Está-se utilizando o termo aresta para representar o lado de um polígono em 2-D.

umas nas outras. O toro plano é representado por um diagrama retangular. As setas demarcadas no retângulo indicam que as arestas com setas simples serão coladas uma sobre a outra, assim como as arestas de setas duplas. Após a colagem, os quatro vértices do retângulo tornam-se um único ponto.

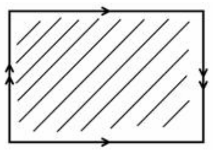

Figura 3 – Representação do toro em 2-D.

Na figura a seguir há a representação de um toro construído no espaço tridimensional euclidiano, obtido por meio das instruções de colagens dadas anteriormente e da aplicação de algumas transformações topológicas. Esta superfície é denominada toro bidimensional ordinário. Após a colagem, o retângulo desaparece, uma vez que ao contrário do retângulo, a superfície do toro plano não tem bordo.

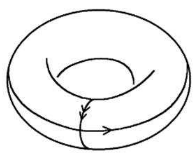

Figura 4 – Representação do toro em 3-D.

O segundo exemplo de superfícies definidas abstratamente é a garrafa de Klein plana, que é construída da seguinte maneira: toma-se como ponto de partida um retângulo, cola-se a aresta superior na inferior, como na construção do toro plano. Em seguida, cola-se a aresta esquerda na direita, após a aplicação de uma "retorção" de

180° numa das extremidades da faixa retangular. A seguir, a representação plana da garrafa de Klein.

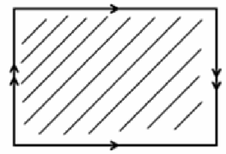

Figura 5 – Representação plana da Garrafa de Klein.

A figura 6 mostra a tentativa de se construir a garrafa de Klein no espaço euclidiano tridimensional. No quinto estágio da construção, uma das extremidades do tubo cilíndrico tem que passar "através" da superfície, para que os pontos A, B, C possam ser colados sobre os pontos A', B' e C', respectivamente. Como cortar a superfície, da forma necessária, não é uma transformação topológica, a única saída é construir a garrafa a partir de uma película "fantasma". Assim, a superfície da garrafa passa através de si mesma, sem, contudo, se auto-interceptar.

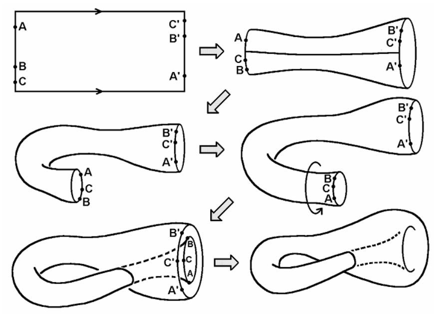

Figura 6 – Construção da Garrafa de Klein em 3-D.

Outro exemplo de superfície definida abstratamente é o plano projetivo, que pode ser representado por um diagrama plano circular, de duas arestas curvilíneas, como na figura 7.

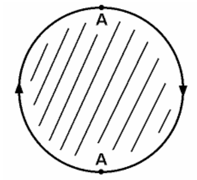

Figura 7 – Uma representação do plano projetivo.

A região circular plana pode ser imaginada como uma semi-esfera achatada, após uma aplicação topológica. Cada ponto do bordo circular é colado no ponto diametralmente oposto. Neste caso, a aresta curvilínea à esquerda é colada na aresta curvilínea à direita, após a aplicação de uma retorção de 180° num dos dois lados. Esta construção é impossível de ser realizada no mundo real. Após a colagem, os dois pontos demarcados por A tornam-se um só ponto do plano projetivo.

O próximo e possivelmente mais famoso exemplo de superfícies definidas abstratamente é a faixa de Möbius, que pode ser construída tomando uma faixa do retângulo utilizado para a construção em 2-D da garrafa de Klein, aplicando a ela uma “retorção” de 180º e colando as setas duplas, como pode ser visto na figura 8.

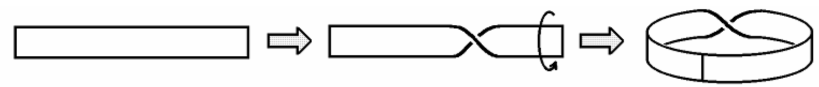

Figura 8 – Construção da faixa de Möbius.

Ainda sobre a faixa de Möbius, uma consideração importante deve ser feita – se um simpático quadrado for um “habitante” da faixa de Möbius, e resolver passear por ela até alcançar novamente sua posição inicial, ele chegará a esta de “cabeça para baixo”, como visto na figura 9. E por esta razão, diz-se que o caminho percorrido pelo quadrado é um caminho que inverte orientação.

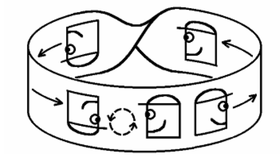

Figura 9 – Passeio pela faixa de Möbius.

Superfícies contendo um caminho fechado que inverte orientação são chamadas superfícies não orientáveis. Para confirmar que uma superfície é não orientável, basta verificar que ela contém em si uma faixa de Möbius. Superfícies que não contém dentro si uma faixa de Möbius são chamadas superfícies orientáveis. A garrafa de Klein e o plano projetivo são superfícies não orientáveis, enquanto a esfera e o toro bidimensional são orientáveis.

Uma superfície é fechada quando não tem bordo, e ao mesmo tempo, pode ser subdivida em um número finito de triângulos. Supõe-se que um triângulo numa superfície é uma porção da superfície homeomorfa a uma região triangular plana. Uma coleção de triângulos de uma superfície é chamada uma triangulação da superfície se obedecer as regras a seguir:

(1) Cada par de triângulos da coleção tem em comum uma aresta ou um vértice, ou nada tem em comum;

(2) Cada aresta de um desses triângulos é comum a exatamente dois triângulos;

(3) Para cada par de pontos A e B da superfície, existem triângulos $\Delta_1,\ldots,\Delta_n$, com A na região triangular Δ_1 e B na região

triangular Δ_n, tal que cada dois triângulos consecutivos desta seqüência têm uma aresta em comum. Esta condição garante que a superfície é conexa por caminhos, isto é, para cada dois pontos A e B da superfície, se pode ir de A até B por um caminho traçado em uma faixa de triângulos.

Como exemplo de uma superfície não fechada tem-se o plano euclidiano, que apesar de não ter bordo, não pode ser subdividido em um número finito de triângulos. Um retângulo plano também não é uma superfície fechada porque tem bordo. A esfera, o toro, a garrafa de Klein e o plano projetivo são superfícies fechadas.

As superfícies fechadas, por serem reunião de um número finito de triângulos, são denominadas superfícies compactas. Logo, o termo superfície fechada tem o mesmo significado que superfície compacta e sem bordo.

Um resultado importante em Topologia garante que todas as superfícies fechadas concebíveis, são construídas por meio de um número finito de somas conexas entre alguma(s) da(s) quatro superfícies básicas: a esfera, o toro, a garrafa de Klein e o plano projetivo. Intuitivamente, a soma conexa é realizada da seguinte forma: considere duas superfícies separadas A e B, mas próximas. Em seguida, corte e remova uma pequena região circular de cada uma das duas superfícies. Assim, um pequeno bordo circular será criado nas superfícies A e B. Por fim, estique um pouco as duas superfícies para fora, puxando-as por seus bordos circulares, fazendo com que os dois bordos se aproximem e, finalmente, cole os bordos circulares um no outro, obtendo a soma conexa de A e B.

A seguir um exemplo de soma conexa entre duas superfícies, um bitoro[5], à esquerda, e um toro, à direita.

[5] O bitoro é a superfície resultante da soma conexa de dois toros.

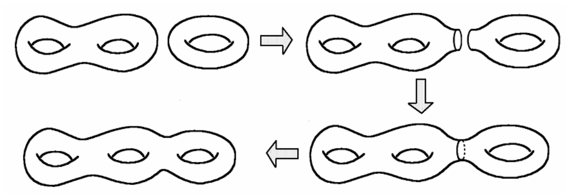

Figura 10 – Processo de soma conexa entre um bitoro e um toro.

Ainda sobre superfícies definidas abstratamente, pode-se afirmar que,

(1) Toda superfície orientável é, topologicamente, uma esfera ou um toro, ou uma soma conexa de dois ou mais toros;

(2) Toda superfície não orientável é, topologicamente, um plano projetivo, ou uma soma conexa de dois ou mais planos projetivos;

(3) A garrafa de Klein é topologicamente, a soma conexa de dois planos projetivos;

(4) A soma conexa de um toro e um plano projetivo é topologicamente a soma conexa de uma garrafa de Klein com um plano projetivo.

As demonstrações desses resultados fogem ao escopo deste trabalho.

Voltando um pouco à História, foi por meio da contribuição do matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann, no início do século vinte, que utilizando superfícies em seus trabalhos sobre Análise Complexa, fomentou o estudo das propriedades topológicas das mesmas. Mais tarde, Henri Poincaré foi o responsável pelo surgimento da Topologia Algébrica, que tenta utilizar conceitos da Álgebra na classificação e no estudo das Superfícies de Riemann. Outros dois ramos da Topologia são a Topologia Geral, que se dedica ao estudo da continuidade em espaços topológicos mais gerais, sem nenhuma estrutura adicional, e a Teoria das Variedades, que se dedica ao estudo das variedades, que são generalizações das superfícies.

Poincaré foi também o responsável por um dos sete célebres problemas, conhecidos como Problemas do Milênio, cujas soluções são estimadas em um milhão de dólares. Em poucas e simples palavras, a conjectura de Poincaré afirma que qualquer variedade tridimensional fechada e com grupo fundamental trivial é homeomorfa a uma esfera tridimensional. Este problema, enunciado em 1904, permaneceu aberto por cerca de cem anos até que o matemático russo Gregori Perelman conseguiu resolvê-lo. Um fato curioso sobre Perelman, é que este se recusou a receber a Medalha Fields, considerada como o Prêmio Nobel da Matemática, e também diz não ter interesse no prêmio de um milhão de dólares, oferecido pelo Clay Mathematics Institute pela solução do problema.

Um outro conceito importante, é o de invariantes topológicos, que são as propriedades dos espaços topológicos que são preservadas por qualquer homeomorfismo. Nesta seção foram apresentados, superficialmente, alguns dos invariantes topológicos, que são sete: Compacidade, Conexidade, Conexidade por Arcos, Característica de Euler, Grupo Fundamental, Grupo de Homologia e Grupo de Homotopia.

Segundo PINTO (2004), nas últimas décadas, pesquisadores ligados à Matemática Aplicada perceberam a utilidade da Topologia para atacar certos tipos de problema, em particular os que se referem às equações diferenciais não lineares. Faz-se uso da Topologia para provar, de modo qualitativo, que certos tipos de equações diferenciais não lineares admitem soluções. Mais recentemente, a Topologia tem sido utilizada como fundamentação matemática para a Teoria das Super Cordas, a mais recente teoria dos físicos sobre a natureza do Universo.

3. Aspectos Transdisciplinares da Topologia

É comum pensar em três grandes áreas quando se pensa em Matemática, a saber, Matemática Pura, Matemática Aplicada e Educação Matemática, sempre lembradas como áreas totalmente disjuntas, o que não é bem verdade, ou não precisa ser... A Topologia, como disciplina, figura nas grades dos bacharelados em Matemática Pura, eventualmente nos cursos de Matemática Aplicada e raramente nas licenciaturas. Infelizmente ainda há entre os próprios matemáticos o sentimento de que não é possível buscar regiões de interseção entre a Matemática da Academia e a Matemática da Escola. É claro que não cabe nas aulas de Ensino Fundamental e Médio estabelecer conceitos avançados de Geometria Diferencial, Análise Matemática ou Topologia, mas muitos desses conceitos e suas aplicações podem ser visualizados nas coisas mais simples e cotidianas, e ter sensibilidade para perceber e fazer uso disso em sua prática docente deve ser um desafio para todo professor de Matemática.

Nesta seção tem-se a intenção de mostrar por meio de um ponto de vista transdisciplinar, algumas dessas maneiras cotidianas de se perceber conceitos topológicos, ainda que de modo intuitivo e superficial, mas que podem servir como elementos disparadores na curiosidade e no interesse do aluno por Matemática. Entendem-se como transdisciplinares, os tratamentos dados a conceitos, de modo que extrapolem suas "disciplinas de origem", perpassando tantas outras e permitindo um múltiplo olhar sobre um mesmo conceito.

Ladrilhagem, Eletricidade e Grafos

Quase todos conhecem o clássico problema da quadratura do círculo, e sabem da impossibilidade de sua solução utilizando apenas régua e compasso. No entanto, há um outro problema não tão conhecido e bem mais recente, o problema da quadratura do quadrado. De acordo com STEWART (2005), o problema consiste em responder a seguinte pergunta: “é possível ladrilhar um quadrado usando ladrilhos quadrados, todos os ladrilhos de tamanhos diferentes?”.

Em 1940, um grupo de matemáticos que se dedicava a este problema descobriu o primeiro quadrado quadriculado (ou ladrilhado com quadrados) simples[6]. Para encontrar tal solução, inicialmente os estudos foram feitos no intento de quadricular um retângulo, que foi representado por meio de uma malha chamada diagrama de Smith. Neste diagrama, que remete facilmente às redes, ou grafos, citadas anteriormente, cada linha horizontal no retângulo quadriculado corresponde a um nó, e cada ladrilho corresponde a uma aresta. Cada aresta liga os dois nós correspondentes às linhas horizontais que se encontram no lado de cima e no lado de baixo do ladrilho, e é rotulada com o tamanho desse ladrilho. A figura 11 apresenta um retângulo quadriculado com dez ladrilhos, conhecido como retângulo de Morón.

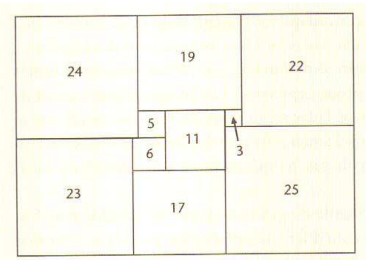

Figura 11(a) – Retângulo de dez ladrilhos de Móron.

[6] Quadrado ladrilhado com quadrados e que não admite nenhum retângulo quadriculado em sua composição.

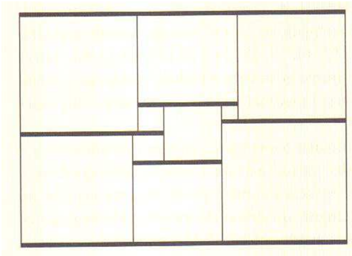

Figura 11 (b) – Segmentos em linhas horizontais do retângulo de Móron.

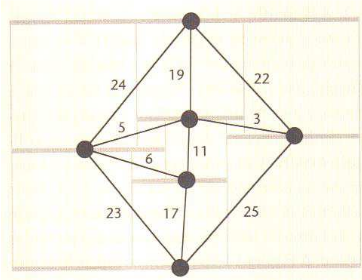

Figura 11(c) – Diagrama de Smith para o retângulo de Móron.

O diagrama de Smith pode também ser interpretado como um circuito elétrico, onde cada aresta representa um arame de resistência unitária e os rótulos numéricos representam as correntes elétricas que fluem pelos arames, de cima para baixo. Desta forma, o diagrama representa um circuito elétrico onde valem as Leis de Kirchhoff (lei dos arcos (arestas) e lei dos nós (vértices)). A percepção de que os diagramas de Smith estavam associados às Leis de Kirchhoff, que já eram conhecidas na época, fez com que o tal grupo de matemáticos fosse capaz de, a partir dos retângulos quadriculados e do que se sabia sobre circuitos elétricos, chegar a um quadrado quadriculado simples.

Brooks, um dos matemáticos que estavam empenhados na busca da solução do problema, encontrou um retângulo quadriculado de 112x75 com 13 ladrilhos, e criou um quebra-cabeças com ele, que logo em seguida foi resolvido por sua mãe, mas de uma maneira diferente, ou seja, ela foi capaz de dispor os mesmos 13 ladrilhos no mesmo retângulo de 112x75, mas numa disposição diferente da de Brooks, o que deixou o grupo abismado, uma vez que isto nunca havia acontecido. Esta situação foi logo interpretada de acordo com os fundamentos das leis de Kirchhoff, em particular, da lei que trata do fluxo das correntes, que dizia que o fluxo de corrente através do circuito não era afetado se o diagrama fosse curto-circuitado em determinados pontos que estivessem no potencial elétrico. Tais pontos correspondiam a pontos de simetria no diagrama de Smith do retângulo de Brooks.

A partir da percepção de que retângulos quadriculados de mesmo tamanho poderiam ser ladrilhados de formas diferentes, o grupo de matemáticos experimentou alterar as configurações de diagramas de Smith para alcançar seu objetivo. E não muito tempo depois se percebeu que tomando dois retângulos quadriculados, poderia se obter um quadrado quadriculado, com a condição de que os retângulos não tivessem ladrilhos de mesmo tamanho, como na figura 12. Algum tempo depois, em 1962, foi provado que o menor quadrado quadriculado simples possível é composto por 21 ladrilhos.

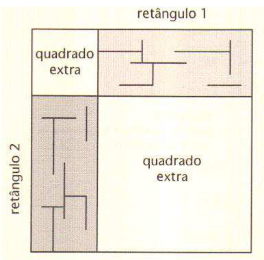

Figura 12 – Construção de um quadrado quadriculado a partir de dois retângulos.

A Arte de Escher e sua Topologia Intuitiva

Das superfícies definidas de modo abstrato, a faixa de Möbius é, talvez, a mais instigante, tanto que há muito tempo extrapolou os limites da Matemática despertando o interesse de estudiosos de outras áreas do conhecimento humano, seja por sua beleza estética, por suas implicações na formulação de teorias outras áreas, como a emergente teoria do Revirão, do psicanalista e desenhista brasileiro Magno Machado Dias, ou simplesmente por curiosidade.

A faixa de Möbius teve destaque na obra do renomado artista gráfico holandês Maurits Cornelis Escher, conforme apresentado na figura 13, onde (a) três faixas de Möbius aparecem entrelaçadas, e (b) formigas andam continuamente pelos supostos dois lados da faixa, sem perceber que caminham continuamente num mesmo lado. Escher foi apresentado à faixa por um amigo matemático, e se inspirou para construir as gravuras a seguir.

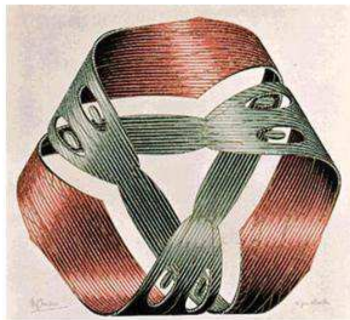

Figura 13(a) – Möbius Strip I, 1961.

Figura 13(b) – Möbius Strip II,1963.

Escher foi primeiro valorizado pelos matemáticos, e só algum tempo depois teve sua obra reconhecida pela classe artística. Isto se deu pela forma com que Escher construía suas xilogravuras e litografias, com forte presença de conceitos matemáticos, explorando construções aparentemente tridimensionais, mas que só são possíveis no plano, como exemplificado na figura 14. É impossível construir uma fonte conforme a litografia de Escher no mundo real.

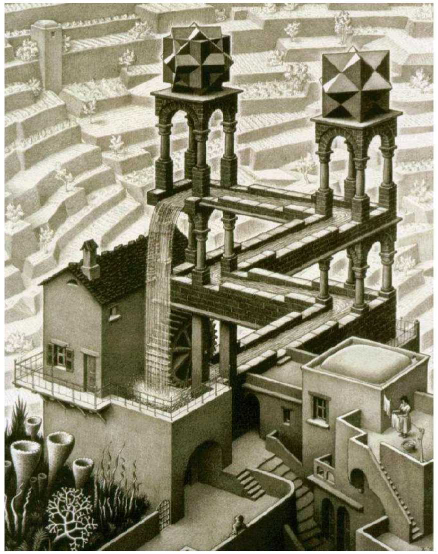

Figura 14 – Waterfall, 1961.

Escher valorizava em sua obra o preenchimento regular do plano, explorações do infinito e, metamorfoses, onde partia de padrões geométricos entrecruzados e as transformava gradualmente em formas completamente diferentes, como na figura 15, onde a pavimentação dá origem aos pássaros.

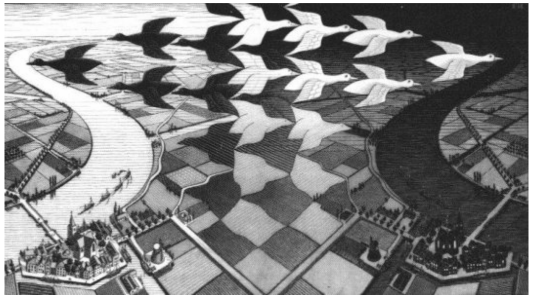

Figura 15 – Day and Night, 1938.

Outra característica da obra de Escher, é que a topologia das figuras que utiliza é preservada quando estas são deformadas continuamente para construir outras figuras, como no caso dos losangos para os pássaros, na figura 15. O mais interessante disso tudo é que Escher não tinha a menor idéia dos conceitos matemáticos que estavam por trás de sua arte, nunca foi um bom aluno, e nem mesmo conseguiu se diplomar no colégio, o que deixava os matemáticos ainda mais fascinados por sua obra.

4. ALGUNS PROBLEMAS DE NATUREZA TOPOLÓGICA

O intuito desta seção é apresentar alguns problemas cotidianos, de acordo com o apresentado por BORGES (2005), e SCHEMMER e PEREIRA (2006) que envolvem conceitos topológicos. Não há intenção de associá-los diretamente a conteúdos trabalhados na Educação Básica, e nem de propor uma revolução na mesma com o ensino de Topologia nos moldes do Ensino Superior, mas sim, mostrar que é possível tratá-la de modo intuitivo, uma vez que está presente em várias atividades cotidianas sem normalmente ser percebida. A maior parte dos problemas a seguir pode ser apresentada como desafios, que certamente despertarão o interesse de alunos de qualquer série do Ensino Básico, principalmente aqueles para os quais não há solução, dado seu caráter mais do que instigante e intrigante. No caso dos problemas em que o entendimento de alguns conceitos elementares sobre Topologia seja necessário, o professor deve introduzi-los e, então, propor os problemas.

Problema 1: Com massa de modelar, ou no papel mesmo, verifique quais letras do alfabeto são topologicamente equivalentes. Justifique porque, por exemplo, D não é equivalente ao K. Dê outros exemplos de letras não equivalentes, justificando-os.

Problema 2: Três casas vizinhas foram construídas recentemente e para que sejam habitadas, é necessário que sejam feitas as instalações de água, energia elétrica e telefone. É possível que tais instalações sejam feitas de modo com que as tubulações não se cruzem?

Figura 16 – Ilustração do Problema 2.

Problema 3: Sem levantar o lápis do papel e nem passar mais de uma vez pela mesma linha, desenhe as figuras a seguir.

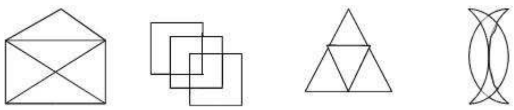

Figura 17

Problema 4: Considere o mapa da América do Sul. Qual o número mínimo de cores possível para colori-lo de modo com que nenhum país tenha a mesma cor que algum país que lhe faça fronteira?

Problema 5: Será possível fazer um buraco numa folha de papel oficio de modo que um homem possa passar por ele? Para responder tal pergunta, faça uma experiência: tome uma folha de papel ofício, dobre-a ao meio, e corte-o de acordo com as linhas da figura 18. Agora desdobre a figura e responda a pergunta.

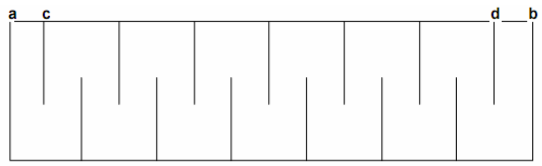

Figura 18

Por trás dos cinco problemas apresentados há conceitos topológicos como grafos, idéia de exterior e interior, entre outras, e como pôde ser notado, são problemas elementares, que a menos de alguns, não demandam conhecimento formal de conceitos matemáticos para encontrar sua solução, ou perceber que a mesma não existe.

5. Considerações Finais

O intuito deste trabalho foi o de mostrar que sob um ponto de vista intuitivo e transdisciplinar é possível perceber que conceitos de áreas da Matemática tidas como mais abstratas, como é o caso da Topologia, podem ser percebidos no cotidiano de qualquer tipo de pessoa, e com isso, mostrar que a Matemática, é também uma atividade humana. Um estudo mais aprofundado pode mostrar com mais detalhes a construção e o comportamento das superfícies definidas abstratamente quando a elas são aplicadas transformações topológicas, ressaltando as invariantes topológicas que não foram apresentadas neste trabalho. Fica como uma sugestão para um próximo trabalho a aplicação dos problemas apresentados na seção 4, em salas de aula do Ensino Básico, para que se possam levantar dados estatísticos referentes ao comportamento dos alunos diante deles.

REFERÊNCIAS:

BORGES, C. C., A Topologia: considerações teóricas e implicações para o ensino da Matemática. *Caderno de Física da UEFS*. v. 3, n. 2, pp. 15-36, 2005.

COURANT, R. e ROBBINS, H., *O que é Matemática?* Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

http://galileu.globo.com/edic/88/conhecimento2.htm acessado em 09/12/07.

http://www.bbc.co.uk/portuguese/noticias/story/2006/08/060822_matematicopremioaw.shtml acessado em 13/08/2006.

http://www.inf.ufsc.br/grafos/temas/euleriano/konigsbgerg.htm acessado em 18/09/2007.

http://www.mcescher.com acessado em 09/12/07.

http://pt.wikipedia.org/wiki/Maurits_Cornelis_Escher acessado em 09/12/07.

http://pt.wikipedia.org/wiki/Topologia_%28matem%C3%A1tica%29 acessado em 18/09/2007.

PINTO, J. A. P., *Notas sobre História da Topologia*. Porto: Universidade do Porto, 2004.

SAMPAIO, J. C. V., *Passeios de Euler e as Pontes de Königsberg*. Belo Horizonte: UFMG, Anais da I Bienal da SBM, 2002.

_________________, *Quatro Cores e Matemática*. Salvador: UFBA, Anais da II Bienal da SBM, 2004a.

_________________, *Topologia das Superfícies – Uma Introdução Intuitiva*. São Paulo: UFSCAR, 2004b.

SCHEMMER, J. e PEREIRA, P. S., *Uma aproximação entre a Educação Básica e o Ensino Superior por meio de aplicações topológicas*. Caxias do Sul: UCS, Anais do IX Encontro Gaúcho de Educação Matemática, 2006.

STEWART, I., *Mania de Matemática: diversão e jogos de lógica e matemática*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2005.