Consistência e Questões Indecidíveis em Matemática

Thiago Felipe Melo de Lima[1] **e Carlos Eduardo Mathias Motta**[2]

[1]*Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro*
UFRRJ
thfmelo@gmail.com

[2]*Universidade Federal Fluminense - UFF*
drummath@yahoo.com

***Resumo**: Daremos um panorama geral sobre o pensamento matemático vigente no final do século XIX e início do século XX, passando pelo problema da consistência e culminando nos teoremas de Gödel. Finalmente falaremos sobre questões que se apresentaram indecidíveis.*

***Palavras-chave:** consistência; Gödel; questões indecidíveis.*

***Abstract:** We will give a general panorama on the valid thought mathematical in the end of nineteen century and beginning of twenty century, passing for the consistence problem and culminating in the Gödel's theorems. Finally we will speak on the undecidible questions.*

***Keywords:** consistence; Gödel; undecidible questions.*

1. Introdução

O final do século XIX e início do século XX foi um período de grande discussão sobre os fundamentos da matemática, a geometria euclidiana que era até então a base da matemática foi seriamente repreendida com a descoberta de que se poderia construir outro tipo de geometria ao contestarmos alguns de seus axiomas. Os matemáticos então buscaram fundamentar a matemática em outra base: a lógica. As três maiores formas de pensamento matemático que se empenharam para resolver a questão, cada qual com muitos seguidores e uma volumosa bagagem de trabalhos são:

Logicismo: a tese do logicismo é de que a matemática é um ramo da lógica. A lógica, portanto deixaria de ser parte de matemática para ser sua geradora.

A principal obra dos logicistas foi o livro *Principia Mathematica* (1910-1913) escrito por Alfred North Whiteread e Bertrand Russel que se propunha a reduzir toda a matemática a lógica pura.

Intuicionismo: a tese do intuicionismo é de que a matemática tem de ser desenvolvida apenas por métodos construtivos finitos sobre a seqüência dos números naturais. A escola intuicionista (como escola) nasceu por volta de 1908 com o matemático holandês L. E. J. Brouwer.

Formalismo: a tese do formalismo é de que a matemática é essencialmente o estudo dos sistemas simbólicos formais e que a base da matemática não está na lógica, mas apenas numa coleção de sinais e símbolos pré-lógicos e num conjunto de operações com eles.

A escola formalista foi criada por David Hilbert posteriormente ao seu célebre estudo postulacional da geometria, em seu ponto de vista a matemática carece de conteúdo concreto e contém apenas elementos simbólicos ideais, portanto a demonstração da consistência de vários ramos da matemática constitui uma parte importante e necessária do programa formalista. Sem o acompanhamento dessa demonstração de consistência, todo o estudo perde fundamentalmente o sentido.

Em seu estudo sobre geometria, consubstanciado no livro *Grundlagen der Geometrie*, Hilbert aguçou o método matemático, levando-o da axiomática material dos tempos de Euclides à axiomática formal dos dias atuais.

O sucesso ou fracasso do programa de Hilbert para salvar a matemática clássica vincula-se a resolução do problema da consistência. Só demonstrações consistentes garantem a ausência de contradições, e as demonstrações antigas de consistência baseadas em interpretações e modelos simplesmente transferem a questão de um domínio para o outro. Em outras palavras, a demonstração da consistência pelo método dos modelos é apenas relativa. Hilbert concebeu uma abordagem direta e nova para o problema da consistência, resumidamente queria provar que dado um conjunto de axiomas de uma teoria não era possível derivar deles fórmulas contraditórias. O desenvolvimento das idéias precedentes com vistas a um teste de consistência direto em matemática constitui o estudo que Hilbert chamou de *teoria da demonstração*, Hilbert e Bernays planejaram dar uma exposição detalhada (com aplicações a toda matemática clássica) da teoria da demonstração em *Grundlagen der Mathematik,* uma obra monumental considerada como o "Principia Mathematica" da escola formalista. Para certos sistemas elementares encontraram-se demonstrações de consistência, ilustrando o que Hilbert queria fazer com toda a matemática, porém para a totalidade dos sistemas o problema da consistência manteve-se refratário.

Aliás, o programa de Hilbert, pelo menos na forma original vislumbrada por ele, parecia desde logo fadado ao fracasso e foi posto em relevo por Kurt Gödel em 1931, antes mesmo da publicação dos *Grundlagen*. Gödel provou por métodos considerados irrepreensíveis pelos seguidores das três principais correntes filosóficas matemáticas que é impossível provarem a consistência de

um sistema dedutivo formalizado como o de Hilbert, rico o suficiente para abarcar toda a matemática clássica com seus próprios princípios lógicos. Esse resultado notável é conseqüência de um outro ainda mais fundamental ainda, Gödel provou que o sistema de Hilbert não era completo, ou seja, ele demonstrou que no sistema existe problemas "indecidíveis" sendo a consistência do sistema um deles. Esses resultados estão certamente entre os resultados mais notáveis da matemática e revelam limitações imprevistas aos métodos matemáticos formais.

Mas o que é a consistência? E quando um sistema formal de axiomas pode ser considerado consistente?

2. O PROBLEMA DA CONSISTÊNCIA

Mostrar a consistência de um conjunto de axiomas seria provar que mediante um conjunto conveniente de regras de procedimento para obtenção de fórmulas aceitáveis a partir dos símbolos básicos, que nunca poderiam ocorrer desses axiomas duas fórmulas contraditórias, em notação lógica fórmulas do tipo S e ~S (não S), onde S é alguma fórmula aceitável no sistema.

Reconheçamos primeiro o problema da consistência, embora não fosse possível prová-la para o todo da matemática, como prová-la para um sistema de axiomas?

Daremos um exemplo de um prova de consistência de um conjunto de quatro axiomas retirados do *Principia Mathematica,* a partir daí estaremos em melhores condições de avaliar o significado do artigo de Gödel de 1931.

Esboçaremos a maneira pela qual se pode formalizar uma pequena porção dos *Principia,* a lógica elementar das proposições. Isto implica a conversão do sistema fragmentário em cálculo de signos não-interpretado. A formalização processa-se em quatro etapas:

1- Prepara-se um catálogo completo dos signos a serem usados cálculo. Esses são o seu vocabulário.

2- Assentam-se *Regras de Formação,* estas declaram quais das combinações dos signos são aceitáveis como fórmulas. Podemos considerar como componentes da gramática do sistema.

3- São estabelecidas *Regras de Transformação ou Inferência,* estas descrevem a estrutura das fórmulas a partir dos quais são deriváveis outras fórmulas de cada estrutura.

4- Selecionam-se certas fórmulas como axiomas, estas são o fundamento para o sistema inteiro.

Utilizaremos a frase *teorema do sistema* para denotar qualquer fórmula derivável dos axiomas pela aplicação sucessiva das regras de transformação. Designaremos por *prova* (ou demonstração) formal, uma seqüência finita de fórmulas, cada uma das quais é um axioma ou pode ser derivada de fórmulas anteriores mediante as regras de transformação.

Para a lógica das proposições o vocabulário é bastante simples. Consiste em signos constantes e variáveis. As variáveis podem ser substituídas por sentenças e são chamadas variáveis sentenciais. Por exemplo, as letras: 'p', 'q', 'r', etc.

Os signos constantes são ou conectivos sentenciais ou signos de pontuação. Os conectivos sentenciais são: '~' que é abreviatura de não, '$\vee$' abreviatura de ou, '$\Rightarrow$' abreviatura de se...então e '$\wedge$' abreviatura de e. Os signos de pontuação são os parênteses aberto o fechado '( )' respectivamente.

As regras de transformação são formadas de tal modo que combinações de signos elementares, que normalmente deveriam ter a forma de sentenças, são chamadas fórmulas. Também cada variável sentencial conta como uma fórmula. Além do mais se a letra S está no lugar de uma fórmula, sua negação formal ~S também é uma fórmula.

Além disso, as *Regras de Formação* adotadas são duas:

Uma Regra de Substituição, esta diz que uma fórmula contendo variáveis sentenciais é sempre possível derivar outra fórmula pela substituição uniforme de variáveis por fórmulas.

A segunda é a *Regra de Destacamento* (ou Modus Ponens), esta afirma que se duas fórmulas tendo a forma S_1 e $S_1 \Rightarrow S_2$ é sempre permissível derivar a fórmula S_2.

Finalmente, os axiomas do cálculo (essencialmente os do *Principia*) são estes:

1- $(p \vee q) \Rightarrow p$, linguagem comum, se p ou q, então p;

2- $p \Rightarrow (p \vee q)$, se p então p ou q;

3- $(p \vee q) \Rightarrow (q \vee p)$, se p ou q, então ou q ou p;

4- $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((r \vee p) \Rightarrow (r \vee q))$, se (se p então q) então (se (ou r ou p) então (ou r ou q)).

Cada um desses axiomas pode parecer óbvio e trivial, porém é possível derivar deles por meio das regras de transformação enunciadas, uma classe infinitamente grande de teoremas. Como mostrar que esse sistema não é contraditório, ou seja, que é impossível derivar dos axiomas uma fórmula S juntamente com sua negação formal ~S.

Dentre os teoremas que podemos derivar desses axiomas está à expressão $p \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q)$ (se p, então se não-p então q). Suponha agora que uma fórmula S e sua negação ~S fossem dedutíveis dos axiomas. Substituindo a variável p por S no teorema (como é permitido pela regra de substituição) obtemos primeiro a fórmula $S \Rightarrow (\sim S \Rightarrow q)$. A partir disso, junto com S, que se pressupõe demonstrável, obtemos através da regra de destacamento a fórmula $(\sim S \Rightarrow q)$. Finalmente, uma vez que ~S é suposta demonstrável, empregando a regra de destacamento uma vez mais obtemos q.

Mas se a fórmula que consiste da variável q for demonstrável, segue-se que substituindo q por **toda e qualquer fórmula, toda e**

qualquer fórmula será dedutível a partir dos axiomas. Assim é claro que se uma fórmula S e sua negação ~S forem dedutíveis dos axiomas, toda fórmula seria dedutível.Em suma, se o sistema não for consistente, toda fórmula dentro dele é um teorema, o que equivale a dizer que se pode derivar qualquer fórmula de um conjunto contraditório de axiomas.

Mas isto possui um inverso: ou seja, se nem toda fórmula dentro do sistema for um teorema (isto é, se há pelos uma fórmula aceitável no sistema que não é derivável dos axiomas) então o sistema é consistente. A tarefa, portanto, é mostrar que há pelo menos uma fórmula que não se pode derivar dos axiomas. Como encontrar tal fórmula?

A idéia é trazer a luz uma propriedade estrutural de fórmulas que satisfaça as seguintes condições:

1- A propriedade deve ser comum a todos os axiomas. Por exemplo: possuir menos de 100 signos elementares esta, porém não satisfaz a condição subseqüente.

2- A propriedade deve ser hereditária sob as Regras de Transformação, ou seja, todos os axiomas possuem a propriedade, qualquer fórmula devidamente derivada deles, por meio das Regras de Transformação também deve possuí-la. Esta condição estipula que todo teorema deve ter a propriedade.

3- A propriedade não precisa pertencer a toda fórmula que se possa construir de acordo com as Regras de Formação do sistema, ou seja, devemos procurar exibir pelo menos uma fórmula que não tenha essa propriedade. Disporemos então de uma prova da consistência do sistema em questão.

Escolhemos a propriedade de ser uma **tautologia**. Na linguagem comum, uma declaração é tautológica se contiver uma redundância. Na lógica, entretanto define-se uma tautologia como um enunciado que não exclui possibilidades lógicas. Por exemplo:

Ou está chovendo ou não está chovendo

Outra forma de colocar isto é afirmar que uma tautologia é verdadeira em todos os mundos possíveis. Ninguém duvidará que independente do estado do tempo o enunciado seja necessariamente verdadeiro.

Dentro do sistema, uma fórmula é uma tautologia se for invariavelmente verdadeira, sem considerar se seus constituintes são verdadeiros ou falsos. Assim, no primeiro axioma $(p \vee p) \Rightarrow p$ o constituinte elementar é p, mas isso não faz diferença se p for tomado como verdadeiro ou falso, nos dois casos o primeiro axioma é verdadeiro, logo é uma tautologia. Com raciocínio análogo é possível provar que os outros axiomas são também tautologias. Agora devemos procurar uma fórmula aceitável no sistema e, todavia por não possuir a propriedade de ser uma tautologia não pode ser um teorema.

Não precisamos procurar muito, por exemplo, a fórmula $p \vee q$ se encaixa as exigências é uma fórmula, mas não é um teorema. Evidentemente não é uma tautologia, podemos observar que substituindo as variáveis p, q por enunciados a sentença não é uma verdade lógica, porque seria falsa se as duas cláusulas fossem falsas e ainda que fosse um enunciado verdadeiro, não é verdadeiro independente da verdade ou falsidade de seus enunciados constituintes.

Ao encontrarmos uma fórmula dentro do sistema que não possui tal propriedade ela não pode ser um teorema, uma fórmula desse tipo não poderia ocorrer se os axiomas fossem contraditórios, portanto construímos uma prova absoluta da consistência do sistema em questão.

O cálculo sentencial é um exemplo de um sistema matemático onde são plenamente efetivados os objetivos da teoria da prova de Hilbert, mas seu vocabulário e aparato formal não bastam para desenvolver sequer a aritmética elementar. No entanto conseguiu-se encontrar provas absolutas de consistência para um sistema que permitia a adição de números cardinais embora não permitisse a multiplicação. O que dizer de um sistema como os do *Principia*, cujo aparato lógico é adequado para exprimir toda a aritmética? Os matemáticos acreditavam que o conjunto proposto para a aritmética era completo ou na pior das hipóteses poderia ser completado mediante o simples acréscimo de um número finito de axiomas a lista original.

O artigo de Gödel em 1931 provou que esses esforços deveriam falhar. Gödel provou que é impossível fornecer uma prova metamatemática da consistência de um sistema suficientemente compreensivo para conter o todo da aritmética, provou também que os *Principia* ou qualquer outro sistema dentro do qual a aritmética pode ser desenvolvida é essencialmente incompleto, ou seja, há enunciados verdadeiros que não podem ser derivados do conjunto.

Como Gödel estabeleceu e provou tais resultados?

3. A PROVA DE GÖDEL

Kurt Frederich Gödel nasceu em 28 de abril de 1906 em Brünn na província austro-húngara da Moravia. Em 1930 começou a seguir o programa de Hilbert para estabelecer a consistência dos sistemas formais de axiomas para a matemática por meios finitos.

Em 1931, aos 25 anos com a publicação do seu artigo "On Formally Undecible Propositions of *Principia Mathematica* and Related Systems" Gödel desfez algumas das suposições fundamentais que serviam de base para a matemática e a lógica.

Gödel descreveu um cálculo formalizado dentro do qual se pode expressar costumeiras notações aritméticas. Cálculo de certa forma parecido com o mencionado no capítulo anterior com signos elementares, fórmulas primitivas (axiomas), fórmulas deriváveis dos axiomas (teoremas) e regras de transformação. Gödel mostrou que é possível atribuir um *único número* a cada signo elementar, a cada fórmula (ou seqüência de signos) e a cada prova (ou seqüência finita

de fórmulas). Este número serve como um rótulo ou índice distintivo denomina-se **Número de Gödel** do signo, fórmula ou prova.

Os signos elementares pertencentes ao vocabulário fundamental são de duas espécies: os signos constantes e as variáveis. A tabela exibe os 10 signos constantes utilizados por Gödel, estabelece o número de Gödel associado a cada um deles e indica seus significados:

Signos constantes	Número de Gödel	Significado
$\sim$	1	não
$\vee$	2	ou
$\Rightarrow$	3	se...então
$\exists$	4	existe um
=	5	é igual
0	6	zero
S	7	o sucessor imediato de
(	8	marca de pontuação
)	9	marca de pontuação
,	10	marca de pontuação

Ao lado dos signos constantes elementares, três tipos de variáveis aparecem:

1- As variáveis numéricas x, y, z, etc, que podem ser substituídas por numerais e expressões numéricas;

2- As variáveis sentenciais p, q, r, etc, que podem ser substituídas por fórmulas;

3- As variáveis predicativas P, Q, R, etc, que podem ser substituídas por predicados como primo ou menor que.

As variáveis são atribuídos valores com as seguintes regras: a cada variável numérica distinta um único número primo distinto maior 10; a cada variável sentencial distinta o quadrado de um número primo maior que 10; a cada variável predicativa o cubo de um número primo maior do que 10. Como exemplo, considere a fórmula do sistema $\exists x; x = s(y)$ (existe um x tal que x é o sucessor imediato de y) vamos encontrar seu número de Gödel.

Pela observação da tabela temos um número diferente para cada signo constante e pela regra anterior atribuímos as variáveis x, y os números 11 e 13 respectivamente. Agora devemos atribuir um único número a fórmula. Fazemos isso considerando a fórmula o único número que é produto dos dez primeiros primos em ordem crescente, sendo cada número primo elevado a uma potência igual ao número de Gödel do correspondente signo elementar. A fórmula acima esta associada ao número:

$$2^{8} \times 3^{4} \times 5^{11} \times 7^{9} \times 11^{8} \times 13^{11} \times 17^{5} \times 19^{7} \times 23^{13} \times 29^{9}$$

A unicidade é garantida pelo Teorema Fundamental da Aritmética que nos diz que todo número natural maior do que 1, ou é primo ou pode ser escrito como um produto de números primos de maneira única.

Em suma, a cada expressão no sistema podemos atribuir um único número de Gödel. Ficou assim estabelecido um método para a completa aritmetização do cálculo formal. O método é um conjunto de diretrizes para erigir uma bijeção entre as expressões no cálculo e um subconjunto dos números naturais.

Gödel mostrou que todos os enunciados sobre as propriedades estruturais de expressões no cálculo podem ser adequadamente espelhados dentro do próprio cálculo. Desta forma o sistema em questão torna-se completamente aritmetizado. Cada enunciado no sistema é representado por uma única fórmula dentro da aritmética e as relações de dependência lógica entre enunciados se refletem plenamente nas relações numéricas de dependência entre suas

correspondentes fórmulas aritméticas. Como exemplo, sendo duas fórmulas aritméticas no cálculo formal, podemos concluir que uma fórmula é parte inicial de uma fórmula maior $\Leftrightarrow$ o número de Gödel x, que representa a primeira for um fator integrante do número de Gödel y que representa a segunda.

A partir daí Gödel mostrou como construir uma fórmula aritmética G que representasse o enunciado: **A fórmula G não é demonstrável**. Esta fórmula G afirma assim ostensivamente por si própria que não é demonstrável, a fórmula G esta associada a um número de Gödel h e é construída de tal maneira que corresponda ao enunciado:

A fórmula com o número de Gödel h não é demonstrável.

Gödel também mostrou que G é demonstrável $\Leftrightarrow$ sua negação formal ~G for demonstrável. Entretanto, se a fórmula e sua própria negação forem formalmente demonstráveis o cálculo aritmético não será consistente. Consequentemente, se o cálculo for consistente, nem G nem ~G são formalmente deriváveis dos axiomas da aritmética. Portanto, se a aritmética for consistente, G será uma fórmula **formalmente indecidível**.

Gödel provou que embora, G não seja formalmente demonstrável ela é não obstante uma verdadeira fórmula aritmética, que pode ser exatamente definida e apresentada dentro da aritmética. Como G é tanto verdadeira como formalmente indecidível, os axiomas da aritmética são incompletos, ou seja, não podemos deduzir todas as verdades aritméticas a partir dos axiomas. Além disso, ficou estabelecido que a aritmética é essencialmente incompleta, mesmo que sejam admitidos axiomas adicionais de modo que a fórmula verdadeira G possa ser derivada do conjunto aumentado, poder-se-ia construir outra fórmula verdadeira porém formalmente indecidível.

Tal resultado ficou conhecido como *Primeiro Teorema de Incompletude de Gödel*.

A seguir, Gödel descreveu como construir uma fórmula aritmética A que representasse o enunciado: **A aritmética é consistente**. Ele provou que a fórmula ($A \Rightarrow G$) é formalmente demonstrável. Finalmente como G é indecidível temos que A também será, segue-se daí que a consistência da aritmética não pode ser estabelecida por um argumento capaz de ser representado no cálculo aritmético formal.

Tal resultado ficou conhecido como *Segundo Teorema de Incompletude de Gödel*.

A idéia de completude ou de que os axiomas de um sistema são completos equivale a dizer que cada enunciado verdadeiro que pode ser expresso no sistema é formalmente dedutível dos axiomas. Se não for este o caso, ou seja, se nem todo enunciado verdadeiro expressável no sistema for dedutível, os axiomas são incompletos. Neste caso Gödel mostrou que qualquer sistema robusto o suficiente para englobar a aritmética (como por exemplo, a matemática atual) é incompleto, existirão questões verdadeiras dentro do sistema que não poderão ser provadas ou refutadas.

Acabando assim com a crença generalizada da comunidade científica de que a matemática era um sistema coerente e completo baseado em um único fundamento lógico e pondo fim ao programa de Hilbert.

4. Questões Indecidíveis

Apesar de Gödel com seus teoremas provar que dado um sistema formal, questões indecidíveis apareceriam à fórmula G não tem em geral um sentido matemático, ou seja, até então nem Gödel ou outro matemático tinha exposto uma afirmação que fosse indecidível.

Para a surpresa de todos uma das questões fundamentais para a matemática da época a Hipótese do Contínuo que era um dos 23 problemas de Hilbert mostrou-se indecidível.

A Hipótese do Contínuo

A Hipótese do Contínuo é uma conjectura proposta por George Cantor, que consiste no seguinte:

Não existe nenhum conjunto com mais elementos do que o conjunto dos números naturais e menos elementos do que o conjunto dos números reais.

Para falar de mais ou menos elementos sobre conjuntos infinitos necessitamos do conceito de cardinalidade que está ligado à quantidade de elementos de um conjunto.

Diremos que dois conjuntos X e Y têm o mesmo número cardinal, e escrevemos card(X) = card(Y) para significar que existe uma bijeção f: X → Y. Dois conjuntos X e Y diremos que *card* (X) < *card* (Y) quando existir uma função injetiva f: X → Y, mas não existir uma função sobrejetiva f: X → Y.

Portanto para a Hipótese do Contínuo era necessário que existisse ou não um conjunto tal que sua cardinalidade seja maior que a dos naturais e menor que a dos reais.

Essa hipótese foi um dos 23 propostos por David Hilbert, no Congresso Internacional de Matemática em 1900, o que levou a que fosse profundamente estudada durante o século XX, porém:

• Em 1940, Kurt Gödel mostrou que a falsidade da hipótese não poderia ser provada a partir dos axiomas de Zermelo-Fraenkel (axiomas da teoria dos conjuntos).

• Em 1963, Paul Cohen mostrou que a veracidade desta hipótese também não poderia ser provada a partir dos mesmos axiomas.

Portanto, a Hipótese do Contínuo é um enunciado verdadeiro na matemática, mas que não pode ser provada sua veracidade ou falsidade, ou seja, é um exemplo importante de uma questão que se mostrou indecidível.

Para fazermos a transição dos naturais para os reais poderíamos pensar se a cardinalidade dos reais é igual à cardinalidade do conjunto das partes dos naturais ou se a partir da cardinalidade dos reais, o conjunto de suas partes tem a mesma quantidade de elementos ou não.

Porém essas e outras hipóteses dependem da Hipótese do Contínuo que se mostrou indecidível podemos aceitá-la ou não, mas não podemos prová-la.

O Axioma da Escolha

É um axioma que se mostrou independente da teoria dos conjuntos, formulado por Ernst Zermelo.

Intuitivamente falando, o Axioma da Escolha diz que se você tem uma coleção de cestas cada qual contendo pelo menos um objeto, então é possível pegar um objeto de cada cesta, mesmo que haja um número infinito de cestas e não haja nenhuma regra que estabeleça qual objeto de cada cesta deve ser escolhido. O axioma afirma que uma forma de escolha existe, mesmo que não haja uma regra para a escolha que possa ser definida em número finito de passos.

Matematicamente falando seu enunciado nos diz que:

Seja X um conjunto cujos elementos são conjuntos não-vazios. Então existe uma função f de domínio X tal que f(x) pertence a x para todo x em X.

Isso é possível para um número finito de conjuntos não-vazios: pegue um elemento do primeiro conjunto e prossiga assim até o n-ésimo conjunto. Agora pense em uma seqüência infinita, podemos ainda tomar um elemento de cada conjunto nunca terminaremos, mas eventualmente produziremos um elemento de cada conjunto. Ainda sim o axioma parece possível.

Mas se tivéssemos uma família verdadeiramente arbitrária de conjuntos?

Por exemplo, se tivéssemos que lidar com a família de todos os subconjuntos não vazios dos reais? Pode ser mostrado que esta família não pode ser escrita como uma seqüência de conjuntos, como escolhemos um número real de cada conjunto?

Não há um algoritmo que permita pegar um elemento de “cada” conjunto. Ainda sim o Axioma da Escolha parece possível já que de fato cada conjunto é não-vazio por que não deveria existir um jeito de escolher um elemento particular de cada conjunto?

Porém neste âmbito o Axioma da Escolha se mostra indecidível, podemos aceitá-lo ou não sem que possamos provar sua veracidade. A aceitação ou não do axioma gera questões complexas na matemática, daremos dois exemplos o Lema de Zorn e o Paradoxo de Banach-Tarski.

O **Lema de Zorn** é um axioma da teoria dos conjuntos equivalente ao Axioma da Escolha, normalmente apresentado por:

Se em um conjunto não-vazio e parcialmente ordenado, todo subconjunto totalmente ordenado tem uma cota superior, então o conjunto tem um elemento maximal.

Seu nome faz referência ao matemático Max Zorn, mas sua primeira formulação se deve ao matemático polonês Kozimierz Kuratwoski. Como um exemplo simples de uma aplicação do Lema de Zorn, podemos provar que todo espaço vetorial independente de sua dimensão possui uma base. Para isto, basta mostrar que todo espaço vetorial contém um conjunto de vetores linearmente independentes (basta tomar um conjunto unitário de um vetor não nulo) e que todo conjunto linearmente independente é um subconjunto de uma base.

Para aceitarmos tal proposição faz-se necessário a aceitação do Lema de Zorn que é uma equivalência do Axioma da Escolha, ou seja, tal proposição tão importante em matemática está sujeita a veracidade de uma questão que se mostrou indecidível na própria matemática.

O **Paradoxo de Banach-Tarski** é uma conseqüência direta da veracidade (que não pode ser provada nem refutada pelos axiomas da teoria dos conjuntos) do Axioma da Escolha, provado nos anos 20 por dois matemáticos - Stephan Banach e Alfred Tarski – seu enunciado afirma que:

É possível dividir uma esfera sólida tridimensional em um número finito de pedaços e com estes pedaços construir duas esferas do mesmo tamanho da original.

Por exemplo, poderíamos teoricamente cortar uma laranja, depois juntar os pedaços para formar duas laranjas do mesmo tamanho da laranja inicial. Este é um resultado extremamente contra-intuitivo visto que se tentarmos isto com facas a laranjas de fato, não conseguiremos.

O paradoxo é um teorema de existência: há uma forma de dividir uma laranja de forma que os pedaços possam ser reagrupados em digamos duas laranjas do mesmo tamanho. O fato de não conseguirmos encontrar tal forma não significa que ela não exista.

O que faz o paradoxo desafiar o senso comum é que, aparentemente o volume de algo aumenta do nada, o paradoxo faz uso de corpos tridimensionais sem volume, por isso não conseguimos realizá-lo com facas e laranjas, pois todos os pedaços que produzimos têm volume determinado.

Tudo está intimamente ligado ao Axioma da Escolha, se ele é verdadeiro, então o paradoxo pode ser derivado dele e em particular deve haver corpos tridimensionais sem volume. Porém o axioma mostrou-se indecidível e fica a pergunta: devemos ou não aceitar tal paradoxo?

5. Conclusões

Sobre os teoremas de incompletude de Gödel, eles nos mostram limites às possibilidades de formulação de teorias a partir de dados níveis de linguagens. Mostram que não só as teorias matemáticas, mas também teorias físicas consolidadas com a Mecânica, por exemplo, que necessitam para serem formalizadas recorrer ao uso de linguagens do cálculo de predicados de primeira ordem, como mínimo, implicam que incluirão (se formalizadas) fórmulas bem formadas (aquelas aceitáveis na sintaxe da linguagem) verdadeiras, mas não dedutíveis dos axiomas como a Hipótese do Contínuo, o Axioma da Escolha e a própria consistência do sistema.

Mostram que nesse sentido este problema não poderia ser resolvido pelo aumento do número de axiomas (sempre existirão novas fórmulas bem formadas verdadeiras, mas não demonstráveis). Em outras palavras, poderíamos resumir afirmando que nas linguagens necessárias para formular as teorias normais da ciência o conjunto de proposições verdadeiras é maior que o conjunto de proposições válidas (aquelas demonstráveis a partir dos axiomas). Segue-se que uma abordagem axiomática da teoria dos números, por exemplo, não pode esgotar o domínio da verdade aritmética.

Porém, a prova de Gödel não pode ser apresentada como um convite ao desespero ou como uma desculpa para o tráfico de mistérios. A descoberta da existência de verdades matemáticas formalmente indecidíveis, como a Hipótese do Contínuo e o Axioma da Escolha, não significa que existam verdades destinadas a permanecer para sempre desconhecidas ou que a intuição mística deve substituir provas adequadas. Isto significa que os recursos do intelecto humano não foram e não podem ser plenamente formalizados e que novos princípios de demonstração aguardam eternamente invenção e descoberta.

Os teoremas indicam que a estrutura e o poder da mente humana são bem mais complexos e sutis que os de qualquer máquina viva até agora considerada. A própria prova de Gödel é um exemplo notável de tal complexidade e sutileza. É uma oportunidade, não para não desanimar, mas para uma apreciação renovada dos poderes da razão criativa, afinal para a ciência, o pior problema é o conjunto dos problemas torna-se vazio.

REFERÊNCIAS:

NAGEL, J. L. *A prova de Gödel*. Debates Lógica, Editora Perspectiva, São Paulo, 2ª edição, 2001.

HOWARD, E. *Introdução à história da matemática.* Coleção Repertórios, Editora Unicamp, Campinas, 3ª edição, 1994.

REIS, M. *Os Teoremas de Incompletude de Kurt Gödel*. Universidade da Madeira, Departamento de matemática e engenharias, Lisboa, 2006.

KAHLE, R. *Os Teoremas de Incompletude de Kurt Gödel*. Boletim da SBM 55, Outubro 2006, pp. 63-76.

LIMA, E. L. *Curso de Análise*. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, vol. 1, 4ª edição, 2005.

Nota: alguns dados foram retirados do site: http://www.wikipedia.org/