

## EQUAÇÕES ALGÉBRICAS DE GRAU 3: UM PASSEIO PELA HISTÓRIA

CARLOS ALBERTO MARTINS DE ASSIS<sup>1</sup> E CAMILLA MENDONÇA MACEDO DE OLIVEIRA<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Faculdade da região dos Lagos – FERLAGOS  
Instituto Católico de Educação e Cultura Mater Coeli  
- CAP - FERLAGOS  
[carlosalbertmartins@yahoo.com.br](mailto:carlosalbertmartins@yahoo.com.br)

<sup>2</sup>Licencianda da FERLAGOS  
camilasimas@hotmail.com

**Resumo:** Na Matemática a teoria das equações algébricas é de relevância indiscutível. Assim, neste artigo, faremos uma exposição histórica do problema da resolução de equações algébricas com coeficientes reais (de grau 3), desde os antigos babilônios passando pelas civilizações grega, árabe e chinesa até chegarmos às contribuições de alguns matemáticos italianos como, por exemplo, Gerônimo Cardano, o brilhante mau-caráter; Niccolò de Brescia (Tartaglia) o pobre menino autodidata e Rafael Bombelli, o destemido manipulador dos números complexos. Comentaremos que na Grécia Clássica, problemas de enunciados muito simples como, a duplicação do cubo e a trissecção do ângulo, ficaram famosos pela impossibilidade de serem resolvidos usando exclusivamente a régua não-graduada e o compasso, e que ao longo dos tempos e em particular no período helênico (compreendido entre o século VI a.C. e o século V d. C.), se tornaram uma fonte rica de idéias e processos matemáticos.

**Palavras-chave:** Equações; Álgebra; História.

**Abstract:** In mathematics the theory of algebraic equations are of great importance. So, in this article, it will be shown a historical exposition of the resolution problem of algebraic equation with

*rational coefficients, since the ancient Babilonics passing through Greek, Arabic and Chinese civilizations up to the contribution of the Italian mathematic, for example, Gerônimo Cardano, the brilliant bad-character; Niccolò of Brescia (Tartaglia) the poor autodidactic boy and Rafael Bombelli, the fearless manipulador of complex numbers. We will mention that in Classical Greece, very simple problems statements, such as duplication of the cube and trisection of the angle became famous by the impossibility of being resolved using exclusively no-graduated ruler and the compass, and that over time and particular in the helenic period (between the sixth century a.C and the fifth century d. C), to become a rich source of ideas and mathematical processes.*

**Keywords:** Equations; Algebra; History.

### 1. INTRODUÇÃO

Uma das grandes preocupações da Álgebra é com a resolução das equações algébricas. E partindo disso, o tema central deste trabalho é apresentar uma linha histórica de como eram resolvidas algumas equações algébricas com coeficientes reais (de grau 3), partindo desde a época dos antigos babilônios, passando pelas civilizações grega, chinesa e árabe, isto é, apresentar situados historicamente os métodos de resolução utilizados em algumas equações algébricas (de grau 3). E ainda, sob o mesmo ponto de vista, relatar que na Europa de 500 a 1600 os matemáticos italianos descobriram um método de resolução para equações de grau 3 que exigia transformações prévias, e assim, obtiveram com êxito uma expressão que envolvia combinações finitas de radicais (as chamadas “fórmulas por meio de radicais”), que permitia calcular uma de suas raízes.

Apesar de tudo, uma pergunta que surgiu naturalmente entre os matemáticos, foi: como eram resolvidas as equações de grau maior que 3?

Assim, para responder a essa pergunta, faremos uma breve retrospectiva histórica. Daí, para as equações de grau 4, no livro do matemático italiano, Gerônimo Cardano (1501-1576) tornava conhecida à solução de uma equação quártica devida a seu discípulo Ludovico Ferrari (1522-1565).

E para as equações de grau maior que 4? Esta é uma pergunta que está longe de ser simples, tão pouco simples que permaneceu envolta em denso mistério por muitos anos. E, em consequência disso, o matemático francês Jean Le Rond D'Alembert, em 1746, pensou ter demonstrado o seguinte teorema: “Toda equação algébrica de grau  $n(n \geq 1)$  admite pelo menos uma raiz complexa”. Esse teorema, conhecido como teorema de D'Alembert ou teorema fundamental da Álgebra, só foi demonstrado por Karl F. Gauss, em 1799, em sua tese de doutoramento. Com efeito, Paolo Ruffini (1765-1822), em 1813, apresentou uma demonstração da impossibilidade de se obter uma fórmula resolutive da equação de grau 5. Mas tal demonstração apresentava lacunas.

Finalmente, o jovem matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829) provou, em 1821, a impossibilidade de se obter uma fórmula que expressava as raízes de uma equação do quinto grau por meio de radicais.

Ainda assim uma questão permanecia: já que as equações de grau  $\geq 5$  não são, de modo geral, resolúveis por radicais, mas alguns tipos o são, como já se sabia bem antes de Abel, o que caracteriza matematicamente estas últimas? A resposta a essa pergunta seria dada pelo matemático francês Evariste Galois (1811-1832), em cuja obra aparece delineado pela primeira vez o conceito de **grupo**, inclusive com esse nome. Resumidamente, a idéia de Galois para responder a essa pergunta foi associar a cada equação um grupo formado por permutações de suas raízes e condicionar a resolubilidade por radicais a uma propriedade desse grupo. E, como para toda equação de grau  $\leq 4$  o grupo de permutações que lhe é associado goza dessa propriedade e para  $> 4$  sempre há equações cujo grupo não se sujeita a essa propriedade, a questão da resolubilidade

por radicais estava por fim esclarecida. E essa condição necessária e suficiente para saber quando uma equação seja resolúvel por radicais ficou conhecida como “grupo de Galois”.

Mas embora não existam fórmulas resolutive de equações algébricas de grau maior que 4, existem os **métodos numéricos** – como, por exemplo: o método de Newton-Raphson (1690) – que permitem descobrir essas raízes, utilizando aliados cada vez mais indispensáveis, que são as calculadoras programáveis e os computadores.

Esse resultado, ou seja, a impossibilidade de se obter soluções para equações de grau maior ou igual a 5 por meio de radicais, deve-se a dois jovens, Niels Abel e Evariste Galois que foram os propulsores da Álgebra Moderna, uma das mais belas páginas da Matemática e uma das principais conquistas dessa ciência no século XIX.

## 2. UM PASSEIO PELA HISTÓRIA...

### Os babilônios

Ao nos referirmos à matemática babilônica, queremos dizer o tipo de matemática cultivada na antiga Mesopotâmia, a região entre os rios Eufrates e Tigre, ou, grosseiramente, o que é hoje o Iraque. Por volta de 4000 anos a.C., os sumerianos desenvolveram um idioma escrito, que chamamos *escritura cuneiforme*. Em seguida, os acadianos adquiriram e desenvolveram sua cultura e, por volta de 1800 a.C., chegou ao poder Hammurabi, da cidade de Babel. É comum chamar todas essas culturas de babilônicas. Os arqueólogos nos tempos atuais têm obtido de suas escavações cerca de 500.000 tábuas de barro com escritura cuneiforme. Perto de 300 dessas tábuas são de matemática, e estas têm sido traduzidas desde 1920.

As tábuas explicam como se resolviam equações quadráticas, seja pelo método equivalente ao de substituição numa “fórmula geral”, seja pelo método de completar quadrados, como também se discutiam algumas cúbicas (grau três) e algumas biquadradas (grau quatro). Encontrou-se uma tábua babilônica que fornece além de uma

tábua de quadrados e de cubos dos inteiros de 1 a 30, também a seqüência de valores de  $n^2 + n^3$  correspondente a esse intervalo. São dados muitos problemas que levam a cúbicas da forma  $x^3 + x^2 = b$ , os quais são resolvidos usando-se a tábua de  $n^2 + n^3$ . Para exemplificar esse método, construiremos uma tábua dessas para  $n$  de 1 a 14 e por meio desta tábua, vamos resolver o seguinte problema babilônico: “Somei o volume e o dobro de uma superfície do meu cubo e obtive como resultado 3136. Encontre o comprimento do lado”.

Assim, chamando de  $x$  o comprimento do lado do cubo, obtemos a seguinte equação cúbica  $x^3 + 2x^2 = 3136$ . Veja a tábua abaixo:

$n$	$n^2$	$n^3$	$n^2 + n^3$	$(n^3 + n^2) + n^2 = 3136$
1	1	1	2	3
2	4	8	12	16
3	9	27	36	45
4	16	64	80	96
5	25	125	150	175
6	36	216	252	286
7	49	343	392	441
8	64	512	576	640
9	81	729	810	891
10	100	1000	1100	1200
11	121	1331	1452	1573
12	144	1728	1872	2016
13	169	2197	2366	2535
14	196	2744	2940	3136

Tábua 1 – Determina a raiz procurada.

Assim, observando a tábua de valores de  $n^2 + n^3$ , uma raiz da equação  $x^3 + 2x^2 = 3136$  é  $n = x = 14$ .

Números negativos não existiam, portanto todos os cálculos eram feitos somente com números positivos e, embora existisse a subtração, não constam cálculos do tipo  $a - b = c$ , onde  $b > a$ . Podemos observar, em suma, que os babilônios eram infatigáveis construtores de tábuas, calculistas extremamente hábeis.

**Atividade Proposta** (Utilizando o método babilônico)

a) Problema babilônico cuja data é de aproximadamente 1800 a.C.

$$\text{Resolver o sistema de equações } \begin{cases} xyz + xy = \frac{7}{6} \\ y = \frac{2x}{3} \\ z = 12x \end{cases} .$$

**Os gregos e os árabes**

O envolvimento grego com as equações cúbicas é razoavelmente intenso. Assim, dentre os vários matemáticos gregos que se empenharam na busca da resolução de algumas equações de grau 3, podemos citar Dionysodorus de Caunus (250-190 d.C.) que obteve uma solução para essas equações a partir de uma construção geométrica envolvendo a interseção de uma parábola e uma hipérbole, método que também foi proposto pelo o grego Arquimedes (287-212 a.C.).

Na civilização árabe, a álgebra de al-Khowârizmî apresenta pouca originalidade. Explicam-se as quatro operações elementares e resolvem-se equações lineares e quadráticas, estas últimas aritmética e geometricamente. Além disso, apresentava também, algumas questões envolvendo mensuração geométrica e alguns problemas de herança.

As melhores atribuições dadas pelos matemáticos muçulmanos verificaram-se no campo da álgebra geométrica. E dessas a mais importante se deve a Omar Khayyam (1048-1122), com a resolução geométrica de algumas equações cúbicas. Seu método era também baseado na interseção de cônicas (um semicírculo e uma parábola). Iremos estudar o procedimento feito por Arquimedes. Portanto, considere as equações  $x^3 + b^2x = cb^2$  e  $x^2 = by$ , onde as incógnitas  $x, y$  e as constantes  $a, b$  e  $c$  pertencem a  $\mathfrak{R}$ . Com efeito, substituindo a 2ª equação na 1ª, fica na forma  $y = \frac{cb}{x} - b$ . Note que, a 2ª igualdade representa uma *parábola* e esta última uma *hipérbole*. Daí, traçando ambos os gráficos sobre o mesmo conjunto e coordenadas, a abscissa do ponto de interseção das curvas será uma raiz da equação  $x^3 + b^2x = cb^2$ .

Para exemplificar, tome a equação  $x^3 + 4x = 16$ , que pode ser reescrita na forma  $x^3 + 2^2x = 2^2 \times 4$ . Com efeito, verificamos que a parábola e a hipérbole terão as formas:

$$x^2 = 2y \quad \text{e} \quad y = \frac{8}{x} - 2.$$

(Ver Figura 1)

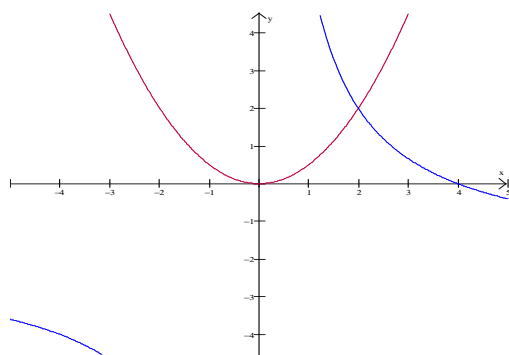


Fig. 1 – A interseção entre as Cônicas.

Conforme se vê, podemos afirmar que uma solução correspondia a  $x = 2$ . Devemos ficar muito impressionados de ver quão hábil deveria ter sido para fazer isto sem símbolos, sem fórmulas e sem ferramentas.

**Atividade Proposta** (Utilizando o método proposto por Arquimedes)

a) Determine uma raiz da equação  $x^3 + 9x = 54$ .

### Os chineses

Na China antiga um relato da história da matemática começa no período Shang, onde o mais importante dos textos de matemática chineses antigos é o *K'ui-ch'ang Suan-shu*, ou *Nove capítulos sobre a Arte da Matemática*, que data do período Han, mas que muito provavelmente contém material bem mais antigo. É uma síntese do conhecimento matemático chinês antigo. Nele estão estabelecidos os traços da matemática antiga da China: cálculos orientados, com teoria e prática ligadas numa seqüência de problemas aplicados. O trabalho, que é rico em conteúdo, consta de 246 problemas sobre agricultura, procedimentos em negócios, engenharia, agrimensura, resolução de equações e propriedades de triângulos retângulos. São dadas regras de resolução, mas não há demonstrações no sentido grego.

Um dos métodos mais antigos de aproximação das raízes reais de uma equação é a regra conhecida como *regula duorum falsorum*, muitas vezes chamada de *regra da falsa posição dupla*. Esse método aparece nos *capítulos sobre a Arte da Matemática*, e se espalhou pela Índia e pela Arábia. De maneira abreviada, e em forma moderna, o método é este: para resolver uma equação  $f(x) = 0$ , admite-se que, em tal momento, dois valores “falsos” para  $x$ :  $x_1$  e  $x_2$ . Com efeito, iremos calcular  $f(x_1)$  e  $f(x_2)$  de modo que, possuam o menor erro possível, isto é, estejam bem próximos de zero. Daí, a intersecção da corda de extremidades  $(x_1, f(x_1))$  e  $(x_2, f(x_2))$  com eixo das

abscissas, dá uma aproximação  $x_3$  da raiz procurada (figura 2), ou seja,

$$x_3 = \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{f(x_1) - f(x_2)}.$$

O processo pode ser repetido com o par apropriado  $x_1, x_3$  ou  $x_3, x_2$ .

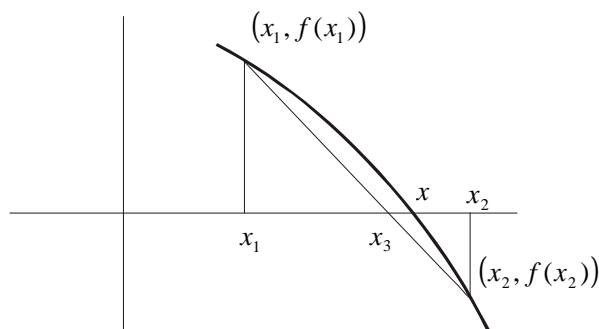


Fig. 2 – Determina a raiz  $x_3$  procurada.

Para exemplificar esse método, vamos calcular até a terceira casa decimal, a raiz de  $x^3 - 36x + 72 = 0$  situada entre os valores “falsos” 2 e 3.

Sua solução fica:

Para  $x_1 = 2 \Rightarrow f(x_1) = 2^3 - 36 \cdot 2 + 72 = 8$  e  $x_2 = 3 \Rightarrow f(x_2) = 3^3 - 36 \cdot 3 + 72 = -9$ . Então, a corda tem extremidades  $(2, 8)$  e  $(3, -9)$ . Assim, a aproximação procurada é:  $x_3 = \frac{3 \cdot 8 - 2 \cdot (-9)}{8 - (-9)} = \frac{42}{17} = 2,470$ . Note que,  $f(2,470)$  está bem próximo de zero.

Após o declínio da matemática grega clássica, a matemática da China tornou-se uma das mais criativas do mundo. Enquanto a Europa Ocidental atravessava o marasmo cultural da Baixa Idade Média, a matemática chinesa crescia, produzindo resultados que a Europa só iria redescobrir muito mais tarde, durante ou após o Renascimento.

**Atividades Propostas** (Utilizando a regra da falsa posição dupla)

- Determine uma raiz da equação  $x^3 + 6x - 15 = 0$  situada entre os valores “falsos” 1 e 2.
- Encontre entre os valores “falsos” 1 e 2: “Algum número real somado a 1 é exatamente igual a seu cubo?”.

### As contribuições dos matemáticos italianos

Provavelmente o feito matemático mais extraordinário do século XVI foi a descoberta, por matemáticos italianos (especialmente da Universidade de Bolonha), da solução algébrica das equações cúbica e quártica. Um deles, chamado Scipione dal Ferro (1465-1526), conseguiu resolver, quase no início do século XVI, a equação  $x^3 + px = q$ . Mas como era de costume na época, não publicou sua solução.

Não demorou muito e outro matemático italiano, Niccolò de Brescia (1499-1557), conhecido por Tartaglia (devido à sua gagueira), em 1541, independentemente, também chegou a uma solução para as equações cúbicas. Na Itália, Gerolamo Cardano (1501-1576), um intelectual extraordinário e polivalente, mas a cujo caráter muitas ressalvas se faziam, cogitava a essa altura publicar um livro de álgebra, aproveitando algumas idéias suas sobre o assunto. Influente e insinuante como era, conseguiu atrair Tartaglia para uma entrevista na qual, prometendo segredo e acenando algumas possíveis recompensas, acabou obtendo a solução desejada.

Para desespero de Tartaglia, quando o livro de Cardano saiu em 1545 com título de ARS MAGNA (arte maior), nele figurava a

solução de  $x^3 + px = q$ , o que gerou uma polêmica de mais de um ano entre os dois. A regra de Cardano verbalmente para resolver  $x^3 + px = q$  que figura no ARS MAGNA é:

“Eleve ao cubo  $1/3$  do coeficiente da primeira potência. Adicione o quadrado da metade do número. Tome a raiz quadrada do todo. Adicione e subtraia a metade do número, obtendo um binômio e seu apótema. Subtraindo a raiz cúbica do apótema<sup>1</sup> da raiz cúbica do binômio<sup>1</sup>, você obtém a incógnita procurada”.

É exatamente esta regra que na literatura se chama a FÓRMULA DE CARDANO. Simbolicamente podemos escrevê-la como:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Estudando os casos em que  $p$  e/ou  $q$  são negativos, chega-se às raízes quadradas de números negativos. Assim, Cardano descobriu uma nova espécie de números que chamou de *numeri ficti* (que no século XVII ficaram conhecidos como *números imaginários*, por René Descartes).

Um exemplo muito interessante de Cardano é: “para  $x^3 = 8x + 3$  obtenho, segundo a fórmula:

$$x = \sqrt[3]{\frac{27 + \sqrt{-5419}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{27 - \sqrt{-5419}}{27}}.$$

Mas, no entanto Cardano sabia que  $x = 3$ .

Entretanto, um outro algebrista italiano chamado Rafael Bombelli (cerca de 1526-1573) publicou um livro chamado

<sup>1</sup> Terminologia usada por Euclides no Livro X dos elementos.

*L'Algebra parte Maggiore dell'Arithmetica* em que descreve as idéias de Cardano de forma didática. É precisamente neste livro onde aparece pela primeira vez a necessidade explícita de introduzir os “*números imaginários*” e também uma primeira apresentação do assunto. Ao aplicar a fórmula de Cardano no exemplo dado por  $x^3 = 15x + 4$ , Bombelli obtém:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}},$$

onde de antemão podemos perceber diretamente que  $x = 4$  é uma solução desta equação. Bombelli decidiu trabalhar como se as “raízes quadradas de números negativos fossem verdadeiros números”. Então, para obter o resultado  $x = 4$ , parte do raciocínio segundo o qual os números  $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$  e  $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$  sejam do tipo  $a + \sqrt{-b}$  e  $a - \sqrt{-b}$ , ou seja,  $a + \sqrt{-b} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$  e  $a - \sqrt{-b} = \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ . Daí,  $x = (a + \sqrt{-b})(a - \sqrt{-b}) = a^2 + b$  (I). Elevando ao cubo os números abaixo, obtemos:

$$(a + \sqrt{-b})^3 = (a^3 - 3ab) + (3a^2 - b)\sqrt{-b} \quad \text{(II)}$$

e

$$(a + \sqrt{b})^3 = (a^3 + 3ab) + (3a^2 + b)\sqrt{b} \quad \text{(III)}$$

Substituindo em (I) e em (II), temos:

$$\left(\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}\right) = \sqrt[3]{4 + 121} = 5$$

⇒

$$\left(\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}\right)^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$$

$$\begin{cases} a^2 + b = 5 \\ a^3 - 3ab = 2. \\ 3a^2 - b = 11 \end{cases}$$

Daí tira-se que  $a = 2$  e  $b = 1$ . Logo,  $x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$ . Percebendo claramente a importância deste achado, o próprio Bombelli diz:

“Era um pensamento louco, segundo o julgamento de muitos, e por muito tempo eu também fui da mesma opinião. Tudo parecia apoiar-se mais em sofismas do que na verdade”.

Ao realizar seus cálculos, Bombelli criou as seguintes regras para se operar com  $\sqrt{-1}$ :

$$\begin{aligned} (\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) &= -1 & \pm 1(\sqrt{-1}) &= \pm\sqrt{-1} \\ (-\sqrt{-1})\sqrt{-1} &= 1 & \pm 1(-\sqrt{-1}) &= \mp\sqrt{-1} \\ (-\sqrt{-1})(-\sqrt{-1}) &= -1 \end{aligned}$$

Criou também a regra para a soma de dois números do tipo  $a + b\sqrt{-1}$ :

$$(a + b\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{-1}.$$

Portanto, estavam lançadas as bases para o futuro desenvolvimento da *Teoria dos números complexos*. Bombelli foi o último grande algebrista italiano da renascença, tendo seu livro lido amplamente em outras partes da Europa.

Hoje, podemos pensar em equações cúbicas como sendo essencialmente todas do mesmo tipo e podendo todas ser resolvidas por um mesmo método. (BOYER, 2002, p. 194).

### A demonstração da Fórmula:

Seja  $K$  o corpo dos números reais e seja uma equação algébrica de grau 3 com coeficientes em  $K$  e  $a \neq 0$  do tipo

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \text{ (I)}.$$

Daí, substituindo, em (I), a relação  $x = y + m$  e calculando  $m$  de modo a anular o termo de 2º grau, temos,  $a(y + m)^3 + b(y + m)^2 + c(y + m) + d = 0$ , ou seja,

$$ay^3 + y^2(b + 3am) + y(3am^2 + 2bm + c) + (m^3a + bm^2 + cm + d) = 0.$$

Logo,  $b + 3am = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{b}{3a}$ .

Portanto é suficiente estudar as equações do terceiro grau do tipo

$$y^3 + py + q = 0 \text{ (II)}.$$

Assim, para resolver a equação (II), vamos supor que  $y = A + B$  (III).

Elevando ao cubo os membros da igualdade (III), temos,  $y^3 = (A + B)^3$ , o que implica,  $y^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B)$ .

Como  $y = A + B$ , temos  $y^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B)$  ou  $y^3 - 3AB(A + B) - (A^3 + B^3) = 0$  (IV).

Comparando a igualdade (II) com (IV), temos que,

$$\begin{aligned} p &= -3AB \\ q &= -(A^3 + B^3) \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned} A^3 B^3 &= -\frac{p^3}{27} \\ A^3 + B^3 &= -q \end{aligned}$$

Portanto, se conseguirmos achar os números  $A$  e  $B$ , então  $y = A + B$  será raiz da equação  $y^3 + py + q = 0$ .

Ora o problema de achar,  $A^3$  e  $B^3$  conhecendo a sua soma e o seu produto é, como sabemos um problema clássico que se resolve com a equação do segundo grau  $w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0$ .

Assim utilizando a fórmula de Bhaskara para resolver esta equação, obtemos  $A^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$  (*binômio*) e

$B^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ , (*apótema*) e conseqüentemente,

$$y = A + B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Portanto,  $y_1 = A + B$ , dada pela fórmula acima, é uma raiz da equação  $y^3 + py + q = 0$ .

Conhecida a raiz  $y_1$  de (II), é possível fatorar o polinômio  $y^3 + py + q$ , dividindo-o por  $y - y_1$ , reduzindo, então, o problema de determinar as outras duas raízes de (II) à resolução de uma equação de grau 2. Finalmente, obtêm-se as três raízes de (I):  $x_1 = y_1 + m$ ,  $x_2 = y_2 + m$  e  $x_3 = y_3 + m$ .

**Atividades Propostas** (Utilizando a Fórmula de Cardano/ O “Método” de Bombelli)

a) Um engenheiro projetou duas caixas-d’água de mesma altura: uma em forma de cubo e a outra em forma de paralelepípedo reto-retângulo, com  $6m^2$  de área de base. O volume da caixa em forma de paralelepípedo reto-retângulo deve ter  $4m^3$  a menos que o volume da caixa cúbica. Qual deve ser a medida, da aresta da caixa cúbica?

- b) Calcule as coordenadas dos pontos de interseção (no campo real) da parábola de equação  $y = x^2 - 6$  e da hipérbole de equação  $y = \frac{9}{x}$ .
- c) Resolva a equação:  $x^3 + 6x = 20$  (Este exemplo está no ARS MAGNA).

**3. OS DOIS PROBLEMAS FAMOSOS DA GEOMETRIA GREGA**

Na Grécia Clássica, apareceram dois famosos problemas de enunciados muito simples: a *duplicação do cubo* e a *trisseção do ângulo*, que caíram como uma verdadeira bomba em sua cultura, e que mais tarde se transformariam para todos os gregos numa grande frustração, devido à impossibilidade de prová-los exclusivamente com o emprego de dois instrumentos: a régua não-graduada e o compasso. O estudo destes dois problemas geométricos que desafiaram o poder inventivo de inúmeros matemáticos e intelectuais durante mais de dois mil anos deu-se início no período helênico (período compreendido entre o século VI a.C. e o século V d.C.). Os dois problemas são:

I–Construção da aresta de um cubo cujo volume seja o dobro do volume de outro (duplicação do cubo);



Fig. 3 – A duplicação do Cubo.



II–Divisão de um ângulo qualquer em 3 partes iguais (trisseccção do ângulo);

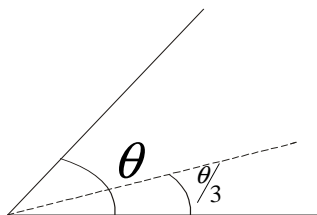


Fig. 4 – A trisseccção do ângulo.

Somente 20 séculos depois dos problemas terem sido propostos é que foi demonstrado que estas construções são impossíveis de serem realizadas (usando os instrumentos inicialmente impostos), com o desenvolvimento da Aritmética, da Álgebra e da Análise durante o século XIX. O matemático francês Pierre Laurent Wantzel (1814-1848) que era lingüista e engenheiro da prestigiosa École Polytechnique, foi quem apresentou a impossibilidade da *duplicação do cubo* e da *trisseccção do ângulo*, utilizando o **teorema 2 (auxiliar)** a seguir. Assim, para abordar tais problemas, utilizaremos os seguintes teoremas aludidos abaixo.

O leitor que estiver interessado em pesquisar alguma demonstração deverá consultar as referências bibliográficas (COURANT, 2000, p.163) e (GARBI, 1997, p. 179).

**Teorema 1:** Se um número racional  $\frac{a}{b}$ , com  $a$  e  $b$  primos entre si, é raiz da equação polinomial de coeficientes inteiros  $c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0$ , então  $a$  será um divisor de  $c_0$  e  $b$  um divisor de  $c_n$ .

**Teorema 2 (auxiliar):** A condição necessária e suficiente para que três raízes de uma equação de grau 3, de coeficientes racionais, sejam construtíveis por régua e compasso é que uma delas seja racional.

I– A Duplicação do Cubo:

Se o cubo dado tiver uma aresta de comprimento unitário seu volume será a unidade cúbica; exige-se que encontremos a aresta  $x$  de um cubo com o dobro deste volume. A aresta  $x$  exigida, portanto satisfará a seguinte equação cúbica

$$x^3 = 2.1 \Rightarrow x^3 - 2 = 0 \quad \text{(I)}$$

Suponhamos que a aresta  $x$  procurada seja um número racional, isto é, a raiz da equação (I) seja um número da forma  $\frac{a}{b}$ ,

onde  $\frac{a}{b}$  é uma fração irredutível. Pelo **teorema 1**,  $a$  será um divisor de  $-2$  e  $b$  será um divisor de 1. Os possíveis valores de  $a$  são:  $\pm 1$  e  $\pm 2$  e os de  $b$  são:  $\pm 1$ . Logo temos as possibilidades:  $\frac{a}{b} \in \left\{ \frac{+1}{+1}, \frac{+1}{-1}, \frac{-1}{+1}, \frac{-1}{-1}, \frac{+2}{+1}, \frac{+2}{-1}, \frac{-2}{+1}, \frac{-2}{-1} \right\}$ . Ou seja:  $\{+1, -1, +2, -2\}$ .

Mas nenhum destes números é raiz, pois as igualdades  $1^3 - 2 = 0$ ,  $(-1)^3 - 2 = 0$ ,  $2^3 - 2 = 0$  e  $(-2)^3 - 2 = 0$  são todas falsas.

Portanto  $x^3 - 2 = 0$  não tem raízes racionais e a aresta  $x$  procurada não pode ser construída somente com régua e compasso, pelo **teorema 2 (auxiliar)**.

II– A Trisseccção do Ângulo:

Para a trisseccção do ângulo, o raciocínio é o seguinte: se um ângulo  $\theta$  é construtível por régua e compasso, então seu cosseno:  $\cos \theta = \varphi$  também o é e reciprocamente. Por uma simples fórmula da

trigonometria o  $\cos \frac{\theta}{3} = z$  está relacionado com o  $\cos \theta = \varphi$  pela equação

$$\cos \theta = \varphi = 4 \cdot \cos^3 \left( \frac{\theta}{3} \right) - 3 \cos \left( \frac{\theta}{3} \right).$$

Em outras palavras, o problema de trissectar o ângulo  $\theta$  com  $\cos \theta = \varphi$  equivale a construir uma solução da equação cúbica

$$4z^3 - 3z - \varphi = 0 \text{ (I)}.$$

Para mostrar que isto não pode ser feito em geral, vamos considerar o caso particular para  $\theta = 60^\circ$ , de modo que  $\varphi = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ . A equação (I) torna-se então  $8z^3 - 6z - 1 = 0$  (II).

Suponhamos que com  $\theta = 60^\circ$ ,  $z = \cos 20^\circ$  seja um número racional da forma  $\frac{a}{b}$ , isto é, que  $z$  seja uma raiz racional da equação

(II), onde  $\frac{a}{b}$  é uma fração irredutível. Assim, pelo **teorema 1**,  $a$  será um divisor de  $-1$  e  $b$  será um divisor de  $8$ . Os possíveis valores de  $a$  são:  $\pm 1$  e os de  $b$  são:  $\pm 1, \pm 2, \pm 4$  e  $\pm 8$ . Logo temos as possibilidades:

$$\frac{a}{b} \in \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \frac{+1}{+1}, \frac{+1}{-1}, \frac{-1}{+1}, \frac{-1}{+1}, \frac{+1}{+2}, \frac{+1}{-2}, \frac{-1}{+2}, \frac{-1}{-2} \right\}, \\ \left\{ \frac{+1}{+4}, \frac{+1}{-4}, \frac{-1}{+4}, \frac{-1}{-4}, \frac{+1}{+8}, \frac{+1}{-8}, \frac{-1}{+8}, \frac{-1}{-8} \right\} \end{array} \right\}.$$

Ou seja:  $\left\{ +1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8} \right\}$ .

Mas nenhum destes números são raízes da equação (II).

Portanto  $8z^3 - 6z - 1 = 0$  não tem raízes racionais e assim, pelo **teorema 2**,  $z = \cos 20^\circ$  não pode ser construído com régua e compasso.

#### 4. COMENTÁRIOS SOBRE AS ATIVIDADES PROPOSTAS

##### Utilizando o Método Babilônico:

a) Vamos eliminar  $x$  e  $y$ , e obter uma equação cúbica em  $z$ . Isto é:

$$z = 12x \Rightarrow x = \frac{z}{12}$$

$$y = \frac{2x}{3} \Rightarrow y = \frac{2 \cdot \frac{z}{12}}{3} = \frac{z}{18}$$

$$xyz + xy = \frac{7}{6} \Rightarrow z \cdot \frac{z}{12} \cdot \frac{z}{18} + \frac{z}{18} \cdot \frac{z}{12} = \frac{7}{6} \Rightarrow \frac{z^3}{12 \cdot 18} + \frac{z^2}{12 \cdot 18} = \frac{7}{6}$$

Dividindo os denominadores por  $(12 \cdot 18)$ , temos:

$$z^3 + z^2 = 7 \cdot 36, \text{ logo } z^3 + z^2 = 256.$$

Daí, pela tábua babilônica,  $z = 6$ .

##### Utilizando o Método de Arquimedes:

a) A equação  $x^3 + 9x = 54$  pode ser reescrita na forma  $x^3 + 3^2x = 3^2 \times 6$ . Daí, temos que a parábola e a hipérbole terão as formas:

$$x^2 = 3y \quad \text{e} \quad y = \frac{18}{x} - 3$$

Ou seja, conforme se vê, pela figura abaixo, uma solução é  $x = 3$ .

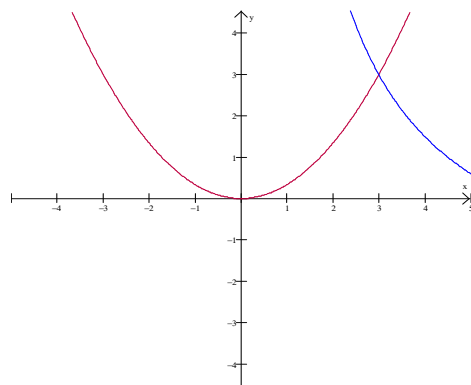


Fig. 5 – A interseção entre as Cônicas.

### Utilizando a Regra da falsa posição dupla:

a) Sua solução fica:

Para  $x_1 = 1 \Rightarrow f(x_1) = 1^3 + 6.1 - 15 = -8$  e  $x_2 = 2 \Rightarrow f(x_2) = 2^3 + 6.2 - 15 = 5$ . Então, a corda tem extremidades  $(1, -8)$  e  $(2, 5)$ . Assim, a aproximação procurada é:

$$x_3 = \frac{2.(-8) - 1.5}{-8 - 5} = \frac{-16 - 5}{-13} = \frac{-21}{-13} = 1,615. \text{ Note que, } f(1,615) \text{ está}$$

bem próximo de zero.

b) Um tal número deve satisfazer a equação  $x + 1 = x^3$  ou, equivalentemente,  $x^3 - x - 1 = 0$ .

Para  $x_1 = 1 \Rightarrow f(x_1) = 1^3 - 1 - 1 = -1$  e  $x_2 = 2 \Rightarrow f(x_2) = 2^3 - 2 - 1 = 5$ . Então, a corda tem extremidades  $(1, -1)$  e  $(2, 5)$ . Assim, a aproximação procurada é:

$x_3 = \frac{2.(-1) - 1.5}{-1 - 5} = \frac{-2 - 5}{-6} = \frac{-7}{-6} = 1,166$ . Observe que,  $f(1,166)$  está bem próximo de zero.

### Utilizando a Fórmula de Cardano/ O “Método” de Bombelli:

a) Indicando por  $x$  a medida dessa aresta, temos:

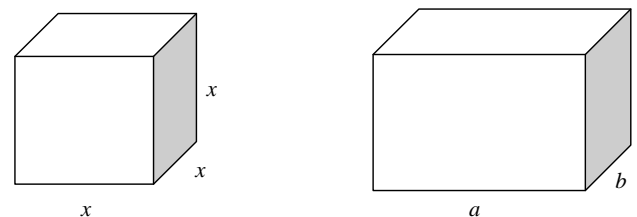


Fig. 6 – As caixas d’água.

Faz-se: A área da base do paralelepípedo igual a  $ab = 6$  e volume igual a  $V = abx \Rightarrow V = 6x$ . O volume do cubo é igual a  $V = x^3$ . Assim o valor de  $x$  é a raiz da equação  $x^3 + 4 = 6x$ , ou seja,  $x^3 - 6x + 4 = 0$ , que é uma equação de grau 3 e é resolvida pela Fórmula de Cardano:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

em que  $p$  é o coeficiente de  $x$  ( $p = -6$ ) e  $q$  é o termo independente ( $q = 4$ ). Aplicando essa fórmula, obtemos:

$$x = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{-2 - \sqrt{-4}}.$$

Iremos utilizar o “método” feito pelo matemático italiano Rafael Bombelli. Isto é,

$$\left(\sqrt[3]{-2+\sqrt{-4}}\right)\left(\sqrt[3]{-2-\sqrt{-4}}\right)=\sqrt[3]{4+4}=2$$

$$\left(\sqrt[3]{-2-\sqrt{-4}}\right)^3=-2+2\sqrt{-1} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a^2+b=2 \\ a^3-3ab=-2 \\ 3a^2-b=2 \end{cases}$$

Daí tira-se que  $a=b=1$ . Logo,  $x=1+\sqrt{-1}+1-\sqrt{-1}=2$ .  
Dividindo  $x^3-6x+4$  por  $x-2$ , para descobrir as outras duas raízes, obtemos  $x^2+2x-2$  (que é um polinômio de grau 2), logo as duas raízes restantes são a da equação  $x^2+2x-2=0$ , isto é,

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+8}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{2}=-1\pm\sqrt{3}.$$

Ora, essas raízes não fazem sentido para o problema. E, portanto, a aresta da caixa cúbica deve medir 2 m.

b) Este problema reduz-se a resolver a equação  $x^2-6=\frac{9}{x}$ , ou seja,

$x^3-6x-9=0$ . Note que esta equação é de grau 3, e pode ser resolvida pela mesma fórmula do problema anterior:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

em que  $p=-6$  e  $q=-9$ . Daí, temos que:

$$x=\sqrt[3]{\frac{9}{2}+\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2+\left(\frac{-6}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{9}{2}-\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2+\left(\frac{-6}{3}\right)^3}}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{9}{2}+\sqrt{\frac{49}{4}}}+\sqrt[3]{\frac{9}{2}-\sqrt{\frac{49}{4}}}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{9+7}{2}}+\sqrt[3]{\frac{9-7}{2}}=\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{1}=2+1=3.$$

Dividindo  $x^3-6x-9$  por  $x-3$ , para descobrir as outras duas raízes, obtemos  $x^2+3x+3$  (que é um polinômio de grau 2), logo as duas raízes restantes são a da equação  $x^2+3x+3=0$ , isto é,  
 $x=\frac{-3\pm\sqrt{-3}}{2}$ . Ora, essas raízes não fazem sentido para o problema.

Como  $y=\frac{9}{x}=\frac{9}{3}=3$ , temos que a interseção é o ponto: (3, 3).

c) Na equação  $x^3+6x=20$ , temos

$$x=\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}+\sqrt[3]{10-\sqrt{108}},$$

então utilizando o “método” feito pelo matemático italiano Rafael Bombelli, fica

$$\left(\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}\right)\left(\sqrt[3]{10-\sqrt{108}}\right)=\sqrt[3]{100-108}=-2$$

$$\left(\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}\right)^3=10+6\sqrt{3}$$

Por analogia, tiramos que

$$\begin{cases} a^2-b=-2 \\ a^3+3ab=10 \\ 3a^2+b=6 \end{cases}$$

Portanto,  $a=1$  e  $b=3$ .

Logo,  $x=(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})=2$ .

Dividindo  $x^3 + 6x - 20$  por  $x - 2$ , obtemos  $x^2 + 2x + 10$ , logo as duas raízes restantes são a da equação  $x^2 + 2x + 10 = 0$ , isto é,  $x = -1 \pm 3\sqrt{-1}$ .

## 5. CONCLUSÕES FINAIS

A humanidade levou milhares de anos para descobrir a solução da equação de 3º grau, mas um aspecto interessante e atraente para estudo e discussão entre alunos e professores que vêm perdendo o significado e a sua potencialidade, é o aspecto histórico. Os processos de resolução da equação de grau 3, que desenrolaram um grande cenário notável dentro da história, necessitam ser resgatadas, pois, os progressos matemáticos que antecederam à solução, conseguiram chegar ao limite do conhecimento matemático da época.

### REFERÊNCIAS:

- AABOE, A. *Episódios da História Antiga da Matemática*, Rio de Janeiro: Coleção do Professor de Matemática/Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2002.
- BEKKEN, O. B. *Equações de Ahmes até Abel*, USU/GPEPM, 1994.
- BOYER, C. B. *História da Matemática*, São Paulo: Edgard Blücher, 2002.
- CARNEIRO, J. P. Q. *Equações algébricas de grau maior que dois: Assunto para o ensino médio?*, Rio de Janeiro: Revista do Professor de Matemática n° 40, 2º quadrimestre de 1999.
- COURANT R., Robbins H. *O que é Matemática?*, Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2000.
- CONTADOR, P. R. M. *Matemática, uma breve história*, São Paulo: Editora Livraria da Física, Vols. I e II, 2006.

- EVES, H. *Introdução à História da Matemática*, tradução: Hygino H. Domingues, São Paulo: Editora da Unicamp, 2004.
- GARBI, G. G. *O Romance das Equações Algébricas*, São Paulo: Makon Books, 1997.
- GUIMARÃES, P. S. *Equações Algébricas*, Santa Maria: Editora da UFSM, 2006.