Uma Análise da Apresentação de Retas Paralelas em Livros Didáticos do Ensino Médio

Ana Maria M. F. Kaleff[1] e Jasias Cesário Franca[2]

[1]*Instituto de Matemática*
Universidade Federal Fluminense
anakallef@vm.uff.br

[2]*Professor do Ensino Médio do Estado do Rio de Janeiro*
jasias@oi.com.br

***Resumo**: Este artigo apresenta os principais aspectos do estudo desenvolvido na Universidade Federal Fluminense para elaboração de uma monografia de conclusão do Curso de Especialização em Matemática para Professores. Foram observadas as formas pelas quais as duas coleções de livros didáticos do Ensino Médio, mais utilizadas em 2006, pelas escolas públicas brasileiras, apresentam propriedades geométricas relacionadas ao conceito de retas paralelas e correlatos. Constatou-se um enclausuramento na apresentação de registros euclidianos.*

Palavras-chave: *Retas paralelas; Livros didáticos; Ensino Médio; Geometrias Não-Euclidianas.*

***Abstract:** This article presents the main aspects of the study developed at Universidade Federal Fluminense to elaborate the conclusion monograph for the Specialization Course in Mathematics for Teachers. The forms were observed by which the two Secondary School textbooks collections mostly used in 2006 in Brazil's public*

schools introduce the geometric properties related to the concept of parallel lines and correlates. An enclausuration in the presentation of Euclidean registers was detected.

Keywords: *Parallel lines, Text-books, Middle School; Non-Euclidean Geometry.*

1. Introdução

O estudo aqui apresentado examinou como o conceito de *retas paralelas* e as propriedades a ele relacionadas são apresentadas pelos livros didáticos das duas coleções mais solicitadas, em 2006, pelas escolas públicas brasileiras do Ensino Médio ao Fundo Nacional de Desenvolvimento Escolar (FNDE).

Partiu-se do levantamento das constatações encontradas nos textos dos três volumes de cada uma das coleções e relacionadas às expressões *retas paralelas* e *geometrias não-euclidianas*, bem como ao termo *paralelismo* e seus correlatos.

A seguir são apresentadas algumas considerações sobre a importância das geometrias não-euclidianas para o desenvolvimento da matemática e no sistema escolar, as motivações que levaram ao estudo, os seus pressupostos teórico-metodologicos, os resultados e algumas conclusões.

2. A importância das Geometrias não-euclidianas

Inicialmente, cabe lembrar a importância histórica do aparecimento das geometrias não-euclidianas no desenvolvimento da Matemática.

Até o inicio do século XIX, a geometria euclidiana foi a única maneira pela qual o universo físico podia ser descrito e caracterizado. A história do desenvolvimento do conhecimento humano mostra que os saberes geométricos, originalmente empíricos, advindos da experiência com o mundo real, por volta do século IV a.C., transformaram-se em um sistema de afirmações baseado em raciocínios dedutivos. Os conhecimentos consensuais até então estabelecidos foram compilados por Euclides em forma estruturada, reunidos em 13 livros denominados "*Elementos*".

Na obra citada, Euclides estabeleceu dez premissas e diversas definições, como base para provar afirmações denominadas de teoremas. Tais premissas eram separadas em dois grupos. Cinco delas, conhecidas como *noções comuns (axiomas*), e as outras cinco, como *postulados*, como se encontram no texto de Carvalho (1994, p.17), especialmente elaborado com vistas à formação do professor de Matemática. Os quatro primeiros postulados em questão são:

1º - Pede-se como coisa possível que se tire de um ponto qualquer para outro ponto qualquer uma linha reta.

2º - Uma linha reta determinada continua em direção de si mesma, até onde seja necessário.

3º - Com qualquer centro e qualquer intervalo se descreve um círculo.

4º - Todos os ângulos retos são iguais.

O quinto desses postulados, conhecido como 5º Postulado de Euclides é caracterizado por apresentar um enunciado mais complexo do que os demais:

> *Se uma reta corta duas outras retas (no mesmo plano) formando ângulos interiores do mesmo lado, menores do que dois ângulos retos, então as duas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontrarão no lado no qual os ângulos são menores que dois ângulos retos.* (Gans, 1973, p. 4)

Em uma edição de 1795 dos "*Elementos*", o físico e matemático inglês, John Playfair, apresenta este postulado de forma equivalente e mais simples, para pontos e retas contidos em um mesmo plano: *"Por um ponto fora de uma determinada reta passa uma e só uma paralela a esta reta"*. Esta redação é hoje em dia habitualmente utilizada nos livros-textos destinados ao ensino da geometria e frequentemente denominada de *Quinto Axioma* (Barbosa, 2004).

Desde a época de Euclides, aproximadamente 300 a.C., o Quinto Postulado tornou-se alvo de críticas, devido a sua forma muito elaborada e à complexidade de interpretação. Para muitos estudiosos, a relação nele descrita mais parecia um teorema do que propriamente um postulado e, por isso, muitos esforços foram realizados, na tentativa de se provar tal afirmação, a partir dos outros quatro postulados. As tentativas foram mal sucedidas e perduraram durante mais de 2000 anos, até que, na primeira metade do século XIX, vários matemáticos como Karl Frederich Gauss em 1824, Nicolai Lobachevsky em 1829, Janos Bolyai em 1832, Georg Bernhard Riemann em 1854 e posteriormente Eugenio Beltrami, Jules-Henri Poincaré e Felix Klein concluíram que não era possível sua demonstração a partir dos demais.

A negação do Quinto Postulado de Euclides tem como conseqüência a descoberta das geometrias não-euclidianas e o surgimento de uma variedade de sistemas axiomáticos alternativos ao euclidiano, representando "*nada menos que uma revolução na geometria. Com o passar do tempo foi provado que os efeitos da descoberta não foram menos profundos em outros ramos da matemática, da física e da filosofia*" (Gans, 1973, p. 4).

Por outro lado, nos meios educacionais, as geometrias não-euclidianas pouco influenciaram, mas na última década diversos documentos governamentais que orientam o ensino da Matemática, tanto no Brasil quanto internacionalmente, apontam para a importância, da introdução de uma visão mais ampla das diversas geometrias, incluindo as não-euclidianas, tanto na formação do professor de Matemática, quanto na escola.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais citam explicitamente que:

> *"Fruto da criação e invenção humanas, a Matemática não evoluiu de forma linear e logicamente organizada. Desenvolveu-se com movimentos de idas e vindas, com rupturas de paradigmas. Freqüentemente um conhecimento foi amplamente utilizado na ciência ou na tecnologia antes de ser incorporado a um dos sistemas lógicos formais do corpo da Matemática. Exemplos desse fato podem ser encontrados no surgimento dos números negativos, irracionais e imaginários. Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a geometria euclidiana, para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico"* (Brasil, 1998, p. 25).

Observa-se nesta citação, o reconhecimento do mérito que a superação de uma visão restrita apenas à geometria euclidiana teve na evolução e no desenvolvimento da Matemática. Cabe lembrar que o estudo das geometrias não-euclidianas possibilita uma revisão da Matemática e dos seus conceitos, os quais passam a ser contestados, discutidos e questionados. Visão que vem ao encontro de um dos objetivos gerais do ensino, ou seja, o de "*questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação*" (Brasil, 1988, p. 56).

3. JUSTIFICATIVA DO ESTUDO

O estudo aqui relatado resultou em uma monografia de conclusão do Curso de Especialização em Matemática para Professores da Universidade Federal Fluminense. (FRANCA, 2007). A abordagem introdutória às geometrias não-euclidianas apresentada na disciplina *Tópicos de Geometria Elementar e Laboratório de Geometria,* obrigatória, na grade curricular do curso, despertou o interesse do autor da referida monografia. Este, apesar de sua formação acadêmica e da vivência de mais de vinte anos como professor de Matemática, nunca havia tido contato com as geometrias não-euclidianas, nem ao menos tinha conhecimento de sua existência. Em sua vivência no curso de especialização, observou uma grande dificuldade de aprendizagem, apresentada por ele e pelos demais participantes.

Tais dificuldades apresentadas pelos discentes vêm ao encontro daquelas relatadas pela orientadora do presente estudo, pois em pesquisa anteriormente realizada na UFF, envolvendo o mesmo público-alvo, ou seja, profissionais com cerca de dez anos de magistério, foi constatado que: cerca de 7% afirmaram não saber o que seja o plano euclidiano, aproximadamente 18% desconhecem quais são os seus postulados e 20% relataram não saber o que seja o Quinto Postulado de Euclides. Também foi constatado que quase 34% não sabem o que são geometrias não-euclidianas e cerca de 54% não as estudaram nos seus cursos de graduação (Kaleff, 2007).

4. METODOLOGIA DE DESENVOLVIMENTO E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para a realização do presente estudo, inicialmente foram buscadas informações junto ao FNDE, sobre o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e sobre o Programa Nacional do Livro do Ensino Médio (PNLEM), ambos do MEC. As informações fornecidas referem-se a todos os volumes relativos à Matemática, encaminhados pelos dois programas às escolas públicas do país, para 2006.

Para o presente estudo foram escolhidas as duas primeiras coleções mais requeridas pelas escolas, sendo em primeiro lugar a coleção Matemática Aula por Aula (Barreto Filho & Silva, 2003) da qual consta que foram solicitados 653.839 volumes, 662.273 e 549.208, respectivamente para as 1ª, 2ª e 3ª séries. Em segundo lugar, a coleção Matemática (Dante, 2004), da qual foram solicitados 425.675 volumes para a 1ª série, 513.809 para a 2ª e 422.212 para a 3ª série.

O estudo, de caráter qualitativo, foi desenvolvido segundo a orientação para as ações de uma pesquisa como apresentada por Fiorentini & Lorenzato (2006).

Além disso, foram utilizados como fundamentação teórica relativamente aos conteúdos matemáticos os autores Gans (1973) e Barbosa (2004). Cabe lembrar que este último, apresenta um rol de proposições e teoremas considerados não dependentes do *Quinto Postulado de Euclides*, sendo todos eles, portanto, resultados válidos em qualquer axiomática que admita os *Axiomas da Incidência e da Ordem* (conforme nomenclatura de David Hilbert). A versão desse postulado, chamado de *axioma* por Barbosa, é a de Playfair e a partir da sua apresentação o texto mescla outros resultados que poderiam estar inseridos em capítulos anteriores, nos quais o autor considera que se encontrem somente resultados independentes desse postulado. Essa postura de Barbosa frente aos resultados equivalentes ou dependentes do Quinto Postulado é que possibilita a análise dos dados, no estudo realizado.

Por sua vez, foi realizada uma análise dos registros gráficos à luz da teoria sobre *registros de representações semióticas* (Duval, 2003), a qual engloba uma análise cognitiva das conversões de registros semióticos, conforme Kaleff (2006). Para a apresentação dos dados e de sua respectiva análise, também se lançou mão das orientações apresentadas por Powell e Bairral (2006). Foram criadas tabelas de

duas colunas, denominadas de *tabelas analíticas* que permitem a apresentação dos dados e de sua análise.

Como a teoria dos registros de representações semióticas ainda é pouco conhecida no Brasil, cabe lembrar que, segundo a linguagem envolvida em uma representação semiótica, os seus registros podem se apresentar em dois tipos de linguagens: *discursivas* e *não-discursivas.* As *linguagens discursivas* são constituídas pela língua natural ou pelas linguagens simbólicas ou formais da Matemática (Duval, 2003). Também existe uma espécie de *linguagem mista*, que, no entanto, não apresenta características próprias de uma linguagem, mas na qual são habitualmente apresentadas as proposições matemáticas. Nessa aparente linguagem ocorrem símbolos matemáticos e sinais da língua natural. Por sua vez, os *registros não-discursivos* são aqueles relacionados às formas gráficas e desenhos como figuras, tabelas, gráficos e outros.

Cabe lembrar ainda que, no caso específico das geometrias, uma análise cognitiva, como a proposta por Duval, permite observar a natureza de um objeto, como considerada pelo sujeito, ao realizar uma atividade matemática. Ou seja, observando um registro semiótico convertido para outro registro, ambos referentes a um mesmo objeto geométrico, pode-se perceber como o sujeito envolvido na atividade (no caso, o autor do livro-didático) considera a natureza do objeto matemático em questão. Dessa forma, se o objeto é representado no livro por um registro euclidiano, a sua natureza seria considerada como euclidiana.

Conforme observado em pesquisa realizada por Kaleff (2007), professores, frente à resolução de problemas introdutórios às geometrias não-euclidianas, lançam mão de uma grande variedade de registros semióticos convencionais da Matemática, a saber, da teoria dos conjuntos, euclidianos e diagramas de Venn; bem como utilizam uma ampla gama de recursos pertencentes a linguagens não convencionais. Essa diversidade de registros e as suas conversões apresentam-se como um rico manancial para referência aos estudos sobre as concepções geométricas de professores.

Finalmente, cabe citar que as questões que orientaram o estudo são as seguintes: como os autores dos livros didáticos apresentam o conceito de retas paralelas e suas propriedades? Os livros apresentam relações e inferências lógicas, conversões entre registros semióticos e relações de interdisciplinaridade (dentro da Matemática, ou fora dela), que permitam ou favoreçam o estabelecimento de outras formas de paralelismo e de conceitos geométricos não-euclidianos?

5. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DAS CONSTATAÇÕES

As constatações encontradas em cada um dos livros didáticos relativamente ao conteúdo *retas paralelas*, objeto deste estudo, foram garimpadas por meio de uma atenta leitura dos textos.

Após a compilação das constatações foram criadas as respectivas tabelas analíticas. Cada uma dessas tabelas apresenta, na primeira coluna, o texto referente à constatação e, na segunda, exibe a sua análise, à qual se segue a apresentação dos registros semióticos envolvidos e as possíveis conversões de registros que ocorreram no transcorrer do enunciado da constatação. Nessa mesma coluna, quando é o caso, ainda são apresentadas observações complementares com vistas a um melhor entendimento da análise e ao preparo das conclusões decorrentes.

Mais a seguir, à guisa de ilustração, apresentam-se, nos Quadros 1, 2, 4 e 5, as tabelas analíticas referentes a duas constatações pertencentes, respectivamente, a cada uma das coleções estudadas. Cabe adiantar que essas tabelas são as mais simples das elaboradas neste estudo e, infelizmente, contém poucos dados sobre as conversões de registros. As demais tabelas, justamente por apresentarem registros gráficos mais elaborados, são muito extensas e de difícil apresentação em um artigo. No Quadro 3, são apresentados alguns registros semióticos.

Segue-se a análise das duas coleções.

SOBRE A COLEÇÃO MATEMÁTICA AULA POR AULA

Na coleção *Matemática Aula por Aula* foi verificada a presença de uma constatação relativamente a retas paralelas e termos correlatos no primeiro volume; seis constatações, no segundo e somente uma, no terceiro.

Os quadros seguintes são exemplos de duas constatações dessa coleção.

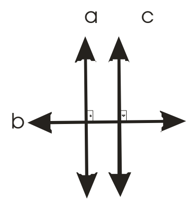
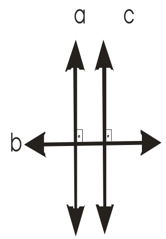
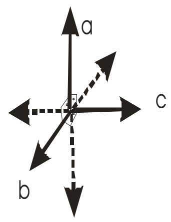
Quadro 1: Constatação 1 do primeiro volume da Coleção *Matemática Aula por Aula*

Apresentação	Análise
No capítulo intitulado "*Progressões*", em sua seção introdutória "*A história conta*", (p. 304), a parte do texto intitulada "*A contribuição de Gauss*" narra: *"(...) É no campo da matemática, contudo, que se concentra a maior parte de sua obra, (de Gauss), nas áreas de probabilidade, estatística, teoria dos números, teoria das funções e geometria. Sua criatividade concebeu a geometria não-euclidiana, mais tarde desenvolvida pelo seu discípulo Riemann e que sem dúvida, serviu de base tanto para a teoria da relatividade, trabalhada por Einstein, quanto para a teoria atômica do século XX*".	O texto menciona a geometria não-euclidiana concebida por Gauss e desenvolvida por Riemann. Neste, o autor reconhece a importância da geometria não-euclidiana para o desenvolvimento científico dos últimos séculos. **Registros Semióticos e Conversões** **<u>Registros Semióticos Apresentados</u>** Linguagem natural discursiva **<u>Conversões</u>** Não há.

	Observações Complementares Cumpre enfatizar que, apesar do reconhecimento dessa importância, não é apresentada nenhuma noção relacionada a algum tipo de novas geometrias, ou seja, nada que chame a atenção do leitor para outras formas de apresentação das geometrias.

Quadro 2: Constatação 5 do segundo volume da Coleção *Matemática Aula por Aula*

Apresentação	Análise
Na introdução ao capítulo 9, intitulado "*Geometria espacial*" o autor cita uma propriedade já apresentada no volume anterior, para o caso do plano e que neste trabalho foi considerada na Constatação 2 . Isto ocorre por meio da afirmação "*Dadas as retas distintas **a**, **b** e **c.** No plano: se **a** é perpendicular a **b** e **c** é perpendicular a **b**, então **a** é paralela a **c**" e da Figura 4.26*. (p.161).	A propriedade a qual esta constatação refere, já considerada na Análise da Constatação 2 do volume 1, é apresentada na forma de registro discursivo com conversão para registro não discursivo euclidiano. O livro didático cita esta propriedade, neste capítulo, apenas para efeito de comparação entre as posições relativas que tais retas, nas mesmas condições, podem apresentar, no plano e no espaço euclidiano. A

 Figura 4.26 Neste volume a propriedade apresentada é mencionada comparando as posições relativas que podem ser apresentadas entre três retas, nas condições citadas, no plano e no espaço. Assim, o livro didático prossegue afirmando: "*No espaço: se **a** é perpendicular a **b** e **c** é perpendicular a **b**, então **a** é paralela a **c** ou **a** é perpendicular a **c***", e apresentando ainda as Figuras 4.27 e 4.28.   Figura 4.27 Figura 4.28 Concluindo é afirmado que: "*Neste capítulo, o estudo da Geometria de posição no espaço será feito de maneira intuitiva, baseando essencialmente na observação de modelos, figuras e objetos. Podemos usar um lápis ou uma*	propriedade da geometria plana, aqui citada, é apresentada por Barbosa, como o Corolário 5.5, (Barbosa, 2004, p.63). De acordo com o livro didático, no espaço, se **a** é perpedicular a ***b*** e ***c*** é perpendicular a ***b***, com ***a***, ***b*** e ***c*** retas distintas, tem-se que a reta ***a*** pode ser paralela ou perpendicular à reta ***c***. Assim sendo, a propriedade, como citada anteriormente, apresentada por Barbosa, não é válida no espaço. **Registros Semióticos e Conversões** **<u>Registros Semióticos Apresentados</u>** Linguagem natural e registro euclidiano. **<u>Conversões</u>** Da linguagem natural para o registro euclidiano, retornando a linguagem natural e novamente ao registro euclidiano.

régua para sugerir uma reta e a folha do caderno ou a parede para sugerir um plano".	**Observações Complementares** Considerando o que é afirmado pelo livro, ou seja, que *o estudo da Geometria de posição no espaço será feito de maneira intuitiva, baseando essencialmente na observação de modelos, figuras e objetos*, cumpre observar que nas condições consideradas nesta constatação, ou seja, *se* ***a*** *é perpedicular a* ***b*** *e* ***c*** *é perpendicular a* ***b****, com* ***a****,* ***b*** *e* ***c*** *retas distintas, no espaço*, pode ser verificado,intuitivamente, que além de paralelas (em um plano) ou concorrentes, como afirmado no livro, as retas **a** e **c** podem também ser, oblíquas (no plano), reversas oblíquas ou reversas ortogonais.

Pelos dados advindos das oito constatações percebeu-se que os registros semióticos não discursivos, portanto, os registros gráficos, são todos *euclidianos* ou *com características euclidianas*. Por outro lado, as constatações que fazem menção às geometrias não-euclidianas são apresentadas apenas em linguagem discursiva, sem a ocorrência de conversões de registros que possibilitem a emergência de novas características para os conteúdos geométricos, como posto por Duval (1995).

Dessa forma, essas constatações não apresentam nenhuma relação de conversão entre registros semióticos que possibilitem o

estabelecimento de outras formas gráficas de paralelismo e de conceitos não-euclidianos, bem como nenhuma relação ou inferência lógica favorece o estabelecimento dos novos conceitos. No entanto, a análise das inferências aponta que embora existam duas possibilidades de exploração de abertura aos conceitos não-euclidianos, o livro didático não as realiza.

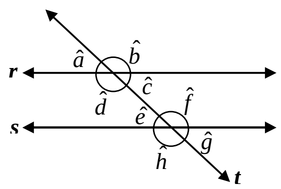
SOBRE A COLEÇÃO MATEMÁTICA

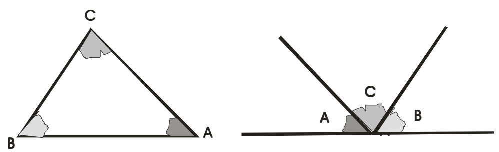
Na coleção *Matemática*, ocorrem quatorze constatações referentes a retas paralelas, sendo sete no primeiro volume; seis, no segundo e somente uma, no terceiro.

Entre os registros semióticos apresentados encontram-se os referentes à linguagem discursiva natural e à simbólica, bem como o registro gráfico euclidiano e até mesmo um tipo de traçado pictórico de características euclidianas, envolvendo traçados e cores (não constante no rol levantado por Kaleff, 2007). Todos esses registros apontam que a coleção opta por uma abordagem euclidiana. No Quadro 3, apresentam-se alguns exemplos desses registros.

Quadro 3: Exemplos de registros semióticos encontrados

Registro Euclidiano **Registro Pictórico** (não apresentado por Kaleff, 2007)





Registro Simbólico

$med(\hat{a}) + med(\hat{b}) + med(\hat{c}) = 180^o$

Duas constatações dessa coleção encontram-se exemplificadas nos Quadros 4 e 5.

Quadro 4: Constatação 1 do segundo volume da coleção *Matemática*

Apresentação	Análise
Na seção "*Leitura*", no final do capítulo 9, (p.185) na seção intitulada: "*A geometria euclidiana*", o livro apresenta um resumo histórico da geometria euclidiana. No qual, são encontradas referências às geometrias não-euclidianas: *(...) "Para Euclides, a Geometria era uma ciência dedutiva que operava a partir de certas hipóteses básicas - chamadas atualmente de axiomas ou postulados. O 'postulado das paralelas' de Euclides, por exemplo, era uma hipótese aceita sem discussão.* *No século XIX os matemáticos começaram a discutir os axiomas, e verificaram um fato surpreendente: bastava pôr de lado o "postulado das paralelas" - viga-mestra da Geometria euclidiana - para tornar possível o desenvolvimento de novos sistemas geométricos.*	Esta constatação, um texto discursivo, apresenta um breve histórico da geometria euclidiana e o surgimento das geometrias não-euclidianas. Apesar de não mencionar as inúmeras tentativas de se provar o 5º Postulado das Paralelas, a partir dos demais postulados de Euclides, o texto argumenta que, com a desconsideração desse postulado, surgiram novos sistemas geométricos, chamados de geometrias não-euclidianas. O autor do texto reconhece que as geometrias não-euclidianas foram determinantes para o avanço das ciências exatas no século XX. **Registros Semióticos e Conversões** **<u>Registros Semióticos Apresentados</u>** Linguagem natural discursiva **<u>Conversões</u>** Não há

O matemático Lobatchevsky foi o primeiro a criar sua própria teoria; um outro mestre da Geometria, Riemann, seguiu o exemplo e criou um sistema diferente. *Essas novas concepções, que se tornaram conhecidas pelo nome de "geometrias não-euclidianas", permitiram às ciências exatas do século XX uma série de avanços, dentre os quais destaca-se a Teoria da Relatividade de Einstein".*	**Observações Complementares** Apesar desse reconhecimento da importância das geometrias não-euclidianas, o livro didático não apresenta nenhum argumento que leve o aluno a ter qualquer noção de algum tipo dessas geometrias. Cumpre salientar que no resumo histórico aqui apresentado não é mencionado de que forma o "*postulado das paralelas*" foi "*posto de lado*" pelos matemáticos nem de que forma as novas teorias foram criadas. Bem como o texto deixa a desejar ao afirmar que "*no século XIX os matemáticos começaram a discutir os axiomas*" pois omite as tentativas realizadas anteriormente como, por exemplo, por Girolamo Saccheri, no século XVIII.

Quadro 5: Constatação 6 do segundo volume da coleção *Matemática*

Apresentação	Análise
Na seção "*Leitura*", no final do capítulo 9, (p.185) na seção intitulada: "*A geometria euclidiana*", o livro apresenta um resumo histórico da	Esta constatação, um texto discursivo, apresenta um breve histórico da geometria euclidiana e o surgimento das geometrias não-euclidianas.

geometria euclidiana. No qual, são encontradas referências às geometrias não-euclidianas: *(...) "Para Euclides, a Geometria era uma ciência dedutiva que operava a partir de certas hipóteses básicas - chamadas atualmente de axiomas ou postulados. O 'postulado das paralelas' de Euclides, por exemplo, era uma hipótese aceita sem discussão. No século XIX os matemáticos começaram a discutir os*	Apesar de não mencionar as inúmeras tentativas de se provar o 5º Postulado das Paralelas, a partir dos demais postulados de Euclides, o texto argumenta que, com a desconsideração desse postulado, surgiram novos sistemas geométricos, chamados de geometrias não-euclidianas. O autor do texto reconhece que as geometrias não-euclidianas foram determinantes para o avanço das ciências exatas no século XX.
axiomas, e verificaram um fato surpreendente: bastava pôr de lado o "postulado das paralelas" - viga-mestra da Geometria euclidiana - para tornar possível o desenvolvimento de novos sistemas geométricos.	**Registros Semióticos e Conversões** **<u>Registros Semióticos Apresentados</u>** Linguagem natural discursiva **<u>Conversões</u>** Não há
O matemático Lobatchevsky foi o primeiro a criar sua própria teoria; um outro mestre da Geometria, Riemann, seguiu o exemplo e criou um sistema diferente. *Essas novas concepções, que se tornaram conhecidas pelo nome de "geometrias não-euclidianas", permitiram às ciências exatas do século XX uma série de avanços, dentre os*	**Observações Complementares** Apesar desse reconhecimento da importância das geometrias não-euclidianas, o livro didático não apresenta nenhum argumento que leve o aluno a ter qualquer noção de algum tipo dessas geometrias. Cumpre salientar que no resumo histórico aqui apresentado não é mencionado de que forma o "*postulado das paralelas*" foi "*posto de lado*" pelos matemáticos nem de que forma as novas teorias

quais destaca-se a Teoria da Relatividade de Einstein".	foram criadas. Bem como o texto deixa a desejar ao afirmar que "*no século XIX os matemáticos começaram a discutir os axiomas*" pois omite as tentativas realizadas anteriormente como, por exemplo, por Girolamo Saccheri, no século XVIII.

Essa coleção apresenta poucas situações interdisciplinares, embora algumas sejam relacionadas à geografia. Essas, no entanto, não acrescentam relações de interdisciplinaridade dentro da própria Matemática, pois não favorecem o estabelecimento de outras formas de paralelismo e de conceitos não-euclidianos. Este é o caso, das constatações envolvendo desenhos do globo terrestre e o de círculos considerados como *"linhas de latitude (chamadas de paralelos) são paralelas entre si e ao equador"* (Dante, 2004, p.53). Nesse contexto, o autor do livro não faz nenhuma referência específica ao que o termo *paralelas* significa, ou seja, ao resultado de planos paralelos que cortam uma esfera e passam pelo seu centro, não se tratando, portanto, do paralelismo euclidiano de retas.

Ao tomar um círculo da esfera como *paralelo*, o livro deixa de lado a oportunidade de abrir caminho ao entendimento dos conceitos e relações elementares da geometria da esfera. Ou seja, ao entendimento do conceito de reta como um círculo máximo da esfera, bem como para a não existência de uma relação de paralelismo relativamente a tal tipo de reta nessa superfície.

Cabe salientar ainda que, entre as quatorze constatações analisadas, a coleção apresenta seis possibilidades de inferências lógicas para a abordagem de situações independentes do Quinto Postulado, as quais poderiam favorecer a abertura para novos conceitos não-euclidianos. No entanto a coleção não as considera.

6. ALGUMAS CONCLUSÕES

Inicialmente, cabe salientar que nos volumes do Ensino Médio considerados no presente estudo, os autores partem do pressuposto de que o aluno já tenha estudado os conteúdos de geometria plana no Ensino Fundamental, apesar de não haver coerência seqüencial na escolha das coleções didáticas, pelas escolas públicas brasileiras. A partir dos dados fornecidos pelo FNDE para 5ª à 8ª séries, constatou-se que os autores das coleções mais solicitadas pelas escolas não se apresentam entre as privilegiadas para o Ensino Médio. Dessa forma, pode-se concluir que não existe uma seqüência relativamente aos autores dos livros e, portanto, não se pode garantir que os alunos são expostos à apresentação dos conteúdos geométricos a partir dos livros.

Diante das constatações mapeadas no presente estudo, percebe-se que a menção às geometrias não-euclidianas é esporádica e meramente ilustrativa quanto ao seu valor histórico para o desenvolvimento da Matemática e das Ciências. Como conseqüência tem-se que, atualmente no Brasil, ocorre a mesma situação relatada por Lénárt nos estudos sobre as escolas norte-americanas: "*Os livros didáticos [...] em sua maioria não fazem menção sobre a existência de outras geometrias, no entanto, quando o fazem é apenas a título de ilustração*" (Lénárt,1996, p. v).

Com tal abordagem para as citações históricas sobre as novas geometrias, aparentemente os livros procuram satisfazer às orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais. No entanto, ainda que as coleções reconheçam e façam menção às geometrias não-euclidianas como determinantes para o avanço científico do século XX, nenhuma incorporação de seus conteúdos é apresentada como atividade didática, e que venha a levar o aluno a ter qualquer noção relativa a esses novos conhecimentos.

Os registros semióticos, como apresentados nas coleções consideradas, provavelmente levarão os alunos do Ensino Médio a se enclausurarem frente à utilização de registros euclidianos, e portanto

não apresentarem abertura para a elaboração de outros registros, de maneira similar ao que foi constatado em outras pesquisas realizadas com adultos e professores (Duval, 1995; Kaleff, 2004).

Convém lembrar que já foram realizadas experiências brasileiras para o ensino de geometrias não-euclidianas, desde a oitava série do Ensino Fundamental até o curso superior. Já na década de 1990, apresentaram-se exemplos da introdução às geometrias não-euclidianas, realizados de forma simples e prática.

A geometria do táxi foi introduzida no Brasil, em livro didático da 8ª série do Ensino Fundamental por Bigode (2002). Por outro lado, Fossa (2002) e Noronha (2006) também apresentam extensas coleções de atividades para a sala de aula sobre a geometria urbana e a isoperimétrica. De uma maneira muito concreta, Kaleff e Nascimento (2004), mostram que a geometria do táxi pode ser modelada por meio de uma maquete, a qual representa uma situação geográfica de uma cidade, o que possibilita o desenvolvimento didático dos seus conteúdos, relacionando-os ao cotidiano do aluno.

Um outro exemplo é o do emprego didático da geometria da esfera, com sua interdisciplinaridade intrínseca à geografia, a cujo ensino recorre Martos (2002) em uma experiência envolvendo geometrias não-euclidianas em turmas da 8ª série.

Tais experiências apontam prováveis caminhos para que outras formas geométricas interessantes e significativas possam ser introduzidas, mesmo nas escolas de Ensino Básico.

Pelo que se conclui do estudo aqui apresentado, pode-se afirmar que os autores dos livros não têm preocupações didáticas com as outras geometrias além da euclidiana, ficando restritos a apresentações meramente ilustrativas sobre a importância histórica das novas geometrias, embora tenham em suas mãos uma grande oportunidade para promover uma abertura dos conhecimentos dos alunos, usuários de suas obras, na direção de uma visão mais ampla em relação aos novos saberes geométricos.

REFERÊNCIAS:

BARBOSA, J.L. *Geometria Euclidiana Plana*. 8ª. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2004.

BARRETO FILHO, B. & SILVA, C.X. *Coleção Matemática Aula por Aula*. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2003.

BIGODE, A. J. L. *Matemática Hoje é Feita Assim, 8ª série*. São Paulo: FTD, 2002.

BRASIL - Ministério da Educação. Secretaria de Educação Infantil e Fundamental, MEC *Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática: 5ª a 8ª Séries*. Brasília, 1998.

CARVALHO J. B. P. Os Elementos de Euclides. *Cadernos da RPM-Revista do Professor de Matemática*, nº 1, 1994.

DANTE L. R. *Coleção Matemática*. 1ª. ed. São Paulo: Ática. 2004.

DUVAL, R. *Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática*. In: Alcântara Machado, S. D. (Ed.) *Aprendizagem Matemática: Representação Semiótica*. São Paulo: Papirus, 2003, pp.1-34.

FRANCA, J. C. *Uma Análise da Apresentação de Retas Paralelas em Livros Didáticos do Ensino Médio*. Monografia de Curso de Especialização. Niterói: Instituto de Matemática. UFF. 2007.

FIORENTINI, D. & LORENZATO, S. *Investigação em Educação Matemática:* Percursos Teóricos e Metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

GANS, D. *An Introduction to Non-Euclidean Geometry*. New York, NY: Academic Press, 1973.

KALEFF, A. M. M. R.. Registros Semióticos e Obstáculos Cognitivos na Resolução de Problemas Introdutórios às Geometrias não-Euclidianas no Âmbito da Formação de Professores de Matemática. *Bolema-UNESP*. Rio Claro (SP). nº. 28, novembro de 2007. pp. 69-94.

------. *Da Rigidez do Olhar Euclidiano às (Im)Possilidades de (Trans)formação dos Conhecimentos Geométricos do Professor de Matemática.* 2004. 450 f. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Federal Fluminense. Niterói, 2004

------ *Noese e Semiose: Considerações sobre Processos Cognitivos e Lingüísticos em Educação Matemática.* Anais do Encontro de Educação Matemática, 4, Rio de Janeiro 2006. 1 CD-ROOM.

------ & NASCIMENTO; R. S. Atividades Introdutórias às Geometrias Não-Euclidianas: o exemplo da Geometria do Táxi**.** *Boletim- GEPEM*, Rio de Janeiro, nº. 44, 2004, pp.11-42.

LÉNÁRT, I. *Non-Euclidean Adventures on the Lénárt Sphere: Activities Comparing Planar and Spherical Geometry*. Berkeley: Key Curriculum, 1996.

MARTOS, Z.. G. Geometrias não-Euclidianas: uma proposta metodológica para o ensino de Geometria no ensino fundamental. *Zetetiké-UNICAMP*, Campinas (SP), 10, nº 17/18, 2002. 43-71.

POWELL, A. & BAIRRAL, M. *A Escrita Matemática e o Pensamento Matemático*. Campinas SP: Papirus, 2006.