A PROVA DOS NOVE

Alexand Andrade de Oliveira
Bolsista PADCT UFF 96/97

Lisete Godinho Lustosa *(Prof. Orientador)*
Mestre em Matemática - UFF
Professora Adjunta - GAN / UFF

A PROVA DOS NOVE

I - Introdução

Como bolsista do projeto **PADCT/UFF** me motivei a escrever um trabalho baseado na leitura de um artigo da Revista do Professor de Matemática número 14, 1989, da autoria de Flávio Wagner Rodrigues (IME-USP), que recordava a todos, velhos companheiros de gerações passadas na Matemática de 1º grau: o "noves-fora" e a prova dos noves de um número natural. Neste artigo, o autor formula as seguintes perguntas:

- O que é o "noves-fora" de um número natural?
- O que é a prova dos noves?
- Por que ela funciona?
- Por que, às vezes, ela falha?
- Por que prova dos noves e não dos sete, dos trezes ou dos quinze?

Tentaremos responder ao longo deste trabalho as perguntas citadas acima. Primeiramente, trataremos do que é o **"noves-fora"** de um número natural. Em seguida, falaremos do que se trata a prova dos noves, mostrando como ela funciona e é aplicada nas operações fundamentais, alertando a todos que a mesma em determinadas situações pode falhar. E por fim, mostraremos o porquê de utilizar a prova dos noves, e não dos setes, dos quinzes ou dos dozes.

II - O noves - fora de um número natural

Sendo **a** um número natural , "tirar o noves-fora" de **a** significa subtrair de **a** o maior múltiplo de 9 menor que **a**, o que é equivalente, achar o resto da divisão do número **a** por 9.

Exemplos:

a) 15 "noves-fora" 6, pois 15-9 = 6 ou porque o resto da divisão de 15 por 9 é 6.

b) 35 "noves-fora" 8, pois 35-27 = 8 ou porque o resto da divisão de 35 por 9 é 8.

Existe uma maneira prática para achar o "noves-fora" de um número natural, que consiste em somar seus algarismos e tirar do resultado o maior múltiplo de 9 nele contido.

Vejamos outros exemplos:

a) Para o natural 282, a soma de seus algarismos é 12. Então 282 "noves-fora" 3, isto é, 3 é o resto da divisão de 282 por 9.

b) Para o natural 564, a soma de seus algarismos é 15. Então 564 "noves-fora" 6, 6 é o resto da divisão de 564 por 9.

Vamos justificar matematicamente a regra prática para achar o noves-fora de um número natural. Para isso, em primeiro lugar mostraremos por indução matemática o seguinte resultado:

para todo número i natural $10^i - 1$ é múltiplo de 9.

Demonstração:

Se $i = 0$, $10^i - 1 = 10^0 - 1 = 0$ é múltiplo de 9.

Suponhamos que a propriedade seja válida para o número natural **k**, isto é, $10^k - 1$ é múltiplo de 9 (hipótese de indução).

Provemos que é válida para o número natural

$i = k+1$.

$10^i - 1 = 10^{k+1} - 1 = 10^k .10 - 1 = 10^k (9+1) - 1 = 9.10^k + 10^k - 1$.

Como 9.10^k é múltiplo de 9 e $10^k - 1$ também (pela hipótese de indução), a soma $9.10^k + 10^k - 1 = 10^i - 1$ é múltiplo de 9.

Logo, mostramos que a propriedade é válida para todo número natural.

Consideremos agora, a representação decimal do número natural **a** como

$(a_n a_{n-1} .... a_1 a_0)$ onde para todo número natural **i**, $0 \le i \le n$, a_i é um algarismo do nosso sistema de numeração.

Então a decomposição decimal de **a** pode ser expressa por:

$$\mathbf{a} = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \dots\dots\dots + 10 a_1 + a_0$$

Mostraremos que:

a e a soma dos seus algarismos, quando divididos por 9, deixam o mesmo resto.

Sejam **a** e **a'** números naturais tais que $a = 9q + r$ onde q e r são números naturais e

$0 \le r < 9$ e $a' = a_n + a_{n-1} + \dots\dots + a_1 + a_0 = 9q_1 + r_1$ onde q_1 e r_1 são números naturais e $0 \le r_1 < 9$.

Observe que r e r_1 são os restos das divisões de **a** e **a'** por 9 respectivamente.

Como $\mathbf{a} = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \dots\dots 10a_1 + a_0$ então

$\mathbf{a} = (10^n - 1 + 1) a_n + (10^{n-1} - 1 + 1) a_{n-1} + \dots + (10-1+1) a_1 + a_0 =$

$(10^n - 1) a_n + (10^{n-1} - 1) a_{n-1} + \dots + (10-1) a_1 + a_n + a_{n-1} + \dots a_1 + a_0$

Considerando o número natural

$b = (10^n - 1)a_n + (10^{n-1} - 1)\, a_{n-1} + \ldots + (10 - 1)\, a_1$ que é múltiplo de 9, pois é soma de múltiplos de 9. Logo, temos $b = 9q_2$ onde q_2 é um número natural.

Assim $a = b + a'$ ou $9q + r = 9q_2 + 9q_1 + r_1 = 9(q_2 + q_1) + r_1$, donde podemos afirmar que $r = r_1$, pois r e r_1 são menores que 9.

Portanto **a** e $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ deixam o mesmo resto quando divididos por 9 .

Logo, podemos garantir que os restos das divisões de um número natural e da soma dos seus algarismos por 9 são iguais.

Isso justifica a regra prática de se determinar "noves-fora" de qualquer número natural, principalmente aqueles constituídos por vários algarismos.

A seguir, utilizaremos o "noves-fora" de números naturais para verificar se o resultado de operações aritméticas envolvendo tais números está correto.

Esse procedimento é conhecido como "prova dos noves".

III - Prova dos Noves

Consideremos a, b, c e d números naturais tais que $a = 9q_1 + r_1$, $b = 9q_2 + r_2$, $c = 9q_3 + r_3$ e $d = 9q_4 + r_4$ onde q_1, q_2, q_3, q_4 são respectivamente os quocientes da divisão de a, b, c e d por 9 e os números naturais r_1, r_2, r_3 e r_4 são os respectivos noves-fora de a, b, c e d .

Com estas hipóteses vejamos a aplicação da prova dos noves para as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão.

Adição:

Supondo-se a + b = c

temos $(9q_1 + r_1) + (9q_2 + r_2) = 9q_3 + r_3$

Daí $9(q_1 + q_2) + (r_1 + r_2) = 9q_3 + r_3$; r_1, r_2, r_3 e $r_4 < 9$.

O que mostra que o "noves-fora" da soma dos noves - fora das parcelas é igual ao "noves-fora" da soma , isto é , o noves-fora de $r_1 + r_2$ é igual a r_3 .

O esquema:

r_1	"noves-fora" de $r_1 + r_2$
r_2	r_3

é um dispositivo prático de apresentar "os noves-fora" dos termos da adição.

Ex.:

$$\begin{array}{r} 346 \\ +\ 683 \\ \hline 1029 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c|c} 4 & 3 \\ \hline 8 & 3 \end{array}$$

Subtração:

Supondo-se a - b = c,

temos a = b + c

donde $9q_1 + r_1 = 9q_2 + r_2 + 9q_3 + r_3$

então $9q_1 + r_1 + 9(q_2 + q_3) + r_2 + r_3$.

O que mostra que o "noves-fora" do minuendo é igual ao "noves-fora" de soma dos noves-fora do subtraendo e do resto , isto é , o noves-fora de $r_2 + r_3$ é igual a r_1 .

O Esquema:

r_2	"noves- fora de" $r_2 + r_3$
r_3	r_1

Ex.:

$$\begin{array}{r} 88 \\ -\ 14 \\ \hline 74 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 5 & 7 \\ \hline 2 & 7 \end{array}$$

Multiplicação:

Supondo a . b = c,

temos $(9q_1 + r_1) \times (9q_2 + r_2) = 9q_3 + r_3$

daí $81.q_1.q_2 + 9q_1r_2 + 9q_2.r_1 + r_1.\, r_2 = 9q_3 + r_3$

então $9(9q_1 q_2 + q_1r_2 + q_2 r_1) + r_1 .\, r_2 = 9q_3 + r_3$.

O que mostra que o "noves-fora" do produto dos "noves-fora" dos fatores é igual ao "noves-fora" do produto, isto é, o noves-fora de $r_1 .\, r_2$ é igual a r_3.

O Esquema:

r_1	"noves-fora" de $r_1 \times r_2$
r_2	r_3

$$\begin{array}{r} 86 \\ \times\ 22 \\ \hline 1892 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 5 & 2 \\ \hline 4 & 2 \end{array}$$

Sugerimos considerar quatro números naturais: **a**, **b**, **c** e **d**, nas hipóteses iniciais, mesmo utilizando-se a **d** somente na regra da divisão.

<u>Divisão:</u>

Admitindo $a = b \cdot c + d$, onde $0 \leq d < b$,

temos $9q_1 + r_1 = (9q_2 + r_2) \cdot (9q_3 + r_3) + (9q_4 + r_4)$

daí $9q_1 + r_1 = 9\,(9q_2q_3 + q_2\,r_3 + q_3\,r_2 + q_4) + r_2 \cdot r_3 + r_4$.

O que mostra que o "noves-fora" do produto dos "noves-fora" do divisor pelo "noves-fora" do quociente somado com o "noves-fora" do resto é igual ao noves-fora do dividendo, isto é, o "noves-fora" de ($r_2 \cdot r_3 + r_4$) é igual a r_1.

O Esquema:

$$\begin{array}{c|c} r_2 & \text{"noves-fora" de} \\ & r_2 \times r_3 + r_4 \\ \hline r_3 & r_1 \end{array}$$

Ex.:

$$\begin{array}{r|l} 362 & 29 \\ \cline{2-2} 072 & 12 \\ 14 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 2 & 2 \\ \hline 3 & 2 \end{array}$$

A verificação da prova dos noves em cada operação consiste na obtenção dos dois números iguais à direita no esquema, quando a conta está correta. Existe um perigo na utilização dessa regra, ela pode não ser suficiente para detectar uma operação errada.

<u>Observemos a seguinte multiplicação:</u>

$$\begin{array}{r} 213 \\ \times\ 6 \\ \hline 1287 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|c} 6 & 0 \\ \hline 6 & 0 \end{array}$$

Notem que a verificação pela prova dos noves pode nos levar a garantir que esta multiplicação está correta. Mas na verdade, houve a inversão na ordem dos algarismos do resultado, o que não foi detectado pela prova, uma vez que a ordem das parcelas não altera a soma.

De fato, a prova dos noves não saberá distinguir 1287 do resultado correto, 1278, da operação 213 X 6 .

Podemos então concluir que, quando a prova dos nove acusa erro, é certeza de que o resultado da operação está errada. Mas, quando ela não acusa erro, o resultado da operação pode estar correta ou não.

Por que utilizar a prova dos noves, e não a dos setes ou dos quinzes?

Não existe nenhuma restrição teórica em utilizarmos, por exemplo, uma prova dos quinzes. O problema é essencialmente de ordem prática, pois o resto da divisão de um número natural não nulo por 15 não é obtido tão simplesmente quanto o resto da divisão por 9.

Usamos a prova dos noves porque a base do nosso sistema de numeração é 10 e, conforme mostramos, cada número natural e a soma dos algarismos da sua decomposição decimal deixam o mesmo resto quando divididos por nove.

Se a base do nosso sistema fosse, por exemplo 21, nós certamente teríamos a prova dos vintes e não dos noves.

IV - Conclusão

Nós que pensamos no mundo matemático numa concepção de ensino que valorize mais a percepção, a compreensão e a formação do pensamento matemático do aluno, concordamos com a não utilização da prova dos noves nos moldes em que era utilizada, pois não passava da aplicação de uma regra técnica que podia levar a conclusões incorretas.

Com este trabalho, tivemos a oportunidade de comprovar que a prova dos noves, tão utilizada em décadas passadas, não deve ser vista como uma simples regra de verificação para exatidão das operações fundamentais. Nela se escondem diversos conceitos matemáticos, como divisibilidade, decomposição decimal de um número natural, indução matemática e outros estudados pela Teoria dos Números que justificam todos os procedimentos adotados como regra.

<u>Obras consultadas</u>

TRAJANO, **Aritmética progressiva** . 90ª edição Rio de Janeiro. Editora Paulo de Azevedo LTDA. 1962.

WATANABE, **Vivendo a Matemática na Terra dos noves fora**. Editora Scipione.

FILHO, Edgard de Alencar. **Teoria Elementar dos números**. 3ª edição, 4ª reimpressão, Editora Nobel, 1992.

IEZZI, DOLCE. Osvaldo e outros. **Tópicos da Matemática**. 2ª edição, Volume 2, Editora Atual.