UM BREVE HISTÓRICO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Leila Botelho
SEE-RJ
leilabotelho@hotmail.com

Wanderley Rezende
Instituto de Matemática
Universidade Federal Fluminense
wmrezende@superig.com.br

UM BREVE HISTÓRICO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Resumo: *Este artigo procura fazer um resumo da evolução do conceito de função até o início do século XX. Veremos que, historicamente, o conceito nasceu e se desenvolveu na busca de filósofos e cientistas em explicar a realidade e encontrar métodos de investigação que permitissem estudar e prever os fenômenos naturais.*

Palavras-chave*: Função;……..*

Abstract: *This paper looks to sum up the evolution of the function concept until the early XX century. We will see that, historically, the concept was born and has grown from philosophers' and scientists' search to explain reality and find methods of investigation that can allow us to study and forsee natural phenomenons.*

Key words**:** Function; ……..

1. Introdução

O conceito de função, presente nos mais diversos ramos da ciência, teve sua origem na tentativa de filósofos e cientistas em compreender a realidade e encontrar métodos que permitissem estudar e descrever os fenômenos naturais. Segundo Caraça (1989), esta realidade apresenta duas características fundamentais: a interdependência, que faz com que todas as coisas estejam relacionadas umas com as outras e a fluência, que faz com que tudo no mundo esteja em permanente mudança. Como estudar variações de quantidade num mundo constituído de partes que dependem umas das outras e que mudam a cada instante?

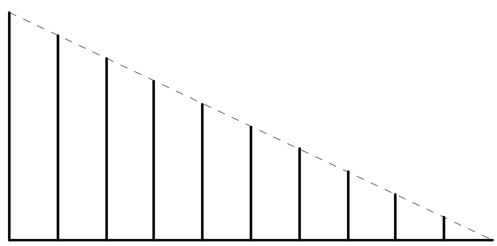
Veremos a seguir que o conceito de função levou muito tempo para ser aperfeiçoado e que, apesar de ter sido explicitado apenas a partir do século XVIII, em algumas idéias anteriores já aparece de forma implícita. Buscaremos identificar as diversas interpretações/representações que estiveram presentes na criação e no desenvolvimento do conceito, o que servirá como base para as nossas reflexões sobre o modo como estas representações têm participado do ensino das funções.

2.

Na Grécia Clássica, as explicações para os fenômenos naturais eram baseadas sobretudo em mitos. A partir da fundação da primeira escola filosófica grega por Tales de Mileto, por volta de 600 a.C os filósofos/cientistas procuraram dar explicações mais racionais para os eventos que ocorriam no mundo que os cercava. Desse modo, uma pedra ao ser largada cai, não por ser esta a vontade dos deuses, mas porque possuem uma qualidade chamada peso, que atrai os corpos para o centro da terra. Fenômenos como este, segundo Platão (427-347 a.C.), deveriam ser estudados pela matemática. O estudo das mudanças físicas, principalmente do movimento, teve em Aristóteles (384-322 a.C.) sua figura principal. A física de Aristóteles era qualitativa e este tipo de abordagem influenciaria a evolução da ciência ainda por muito tempo. Veremos adiante que o conceito de função nasceu a partir do momento em que os cientistas passaram a descrever o movimento de forma quantitativa.

Por volta de 1100, quando os europeus entraram em contato com os povos do oriente através de viagens comerciais e das Cruzadas, os principais pensadores da Grécia foram traduzidos e suas idéias foram disseminadas. Várias Universidades foram criadas, como a de Bolonha, em 1088, e as de Paris, Oxford, Cambridge, Salermo, por volta de 1200. O pensamento aristotélico foi adotado como modelo para a filosofia/ciência na Idade Média, também conhecida como filosofia escolástica.

Este modelo foi questionado por padres como Roger Bacon (1214-1294) e Guilherme de Ockham (1300-1349), que criticaram fortemente as idéias de Aristóteles e defenderam que as verdades científicas deveriam necessariamente ser obtidas através da experiência. Na Universidade de Paris, o Bispo Nicolau de Oresme (1323–1382), ao estudar o movimento uniformemente diforme (movimento com aceleração constante), representou num gráfico (ver abaixo) a velocidade variando com o tempo da seguinte maneira: marcou instantes de tempo ao longo de uma linha horizontal que ele chamou de *longitudes* e representou as velocidades em cada tempo por linhas verticais, perpendiculares às longitudes, que ele denominou *latitudes:*



Os escolásticos deixaram para o século XV explicações acerca dos fenômenos naturais baseadas na doutrina cristã e na física qualitativa de Aristóteles. Neste início do período Renascentista, surgiram na Europa novas traduções em latim das obras gregas, e foi nesta época que os europeus entraram em contato com o pensamento de Platão. Segundo Kline (1990), os cientistas da época absorveram a filosofia platônica e combinaram estes pensamentos com os da Igreja: Deus criou e governa todas as coisas através da matemática.

Esta nova filosofia influenciou grandes cientistas, como o astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630), que adotou a teoria heliocêntrica de Nicolau Copérnico (1473-1543) e enunciou leis matemáticas que descreviam o movimento dos planetas. A terceira Lei de Kepler afirma que o*s quadrados dos períodos orbitais dos planetas são proporcionais aos cubos dos semi-eixos maiores das órbitas.* Esta lei descreve de forma quantitativa um fenômeno físico e expressa matematicamente a relação entre as duas grandezas envolvidas, trazendo em seu enunciado implicitamente o conceito de função. Podemos observar também a diferença entre esta e a 1ª Lei de Kepler, esta qualitativa: *os planetas descrevem em torno do sol uma elipse da qual o sol ocupa um dos focos.* Apesar de Kepler ter dado os primeiros passos na direção de uma física quantitativa, o rompimento definitivo com a maneira aristotélica de explicar os fenômenos naturais veio através de Galileu Galilei (1564-1642), considerado o fundador da ciência moderna.

Galileu chamou a atenção das autoridades da Igreja ao questionar publicamente dois grandes pilares da filosofia cristã: o homem como centro do universo e a física de Aristóteles como modelo para a ciência. Galileu adotou e ensinou a teoria heliocêntrica nas Universidades de Pisa e de Pádua e, nesta época, seus experimentos mostraram que o peso de um corpo não exerce influência na velocidade da queda livre, contrariando Aristóteles, que afirmava que corpos mais pesados caem com velocidade maior. Estas novidades, que não eram bem - vindas, levaram Galileu ao isolamento, período em que escreveu *As duas novas ciências*. Nesta obra sobre dinâmica e resistência dos materiais, entre outros resultados, enunciou a lei da queda dos corpos no vácuo: *o espaço percorrido por um corpo em queda livre é diretamente proporcional ao quadrado do tempo levado para percorrer este espaço.* Esta lei, assim como a 3ª Lei de Kepler, traz em seu enunciado claramente o conceito de função. Ambos os cientistas iniciaram uma nova era para a ciência, que, a partir deles, passou a ser fundamentada na experimentação e no uso da matemática.

Para estabelecer o conceito de função - como relação entre grandezas que variam - foi necessária a definição do conceito de variável, o que se deu, inicialmente, a partir da simbolização da álgebra. O uso de símbolos ingressou na matemática através de duas vias principais: pela álgebra desenvolvida na Grécia por Diofanto e pela álgebra hindu. Além de introduzir a utilização de símbolos para representar incógnitas, potências e operações, Diofanto foi pioneiro na resolução de equações indeterminadas. Os matemáticos hindus, sobretudo a partir do século 2 d.C., desenvolveram uma álgebra mais simbólica do que a de Diofanto, avançando também na resolução de equações indeterminadas.

A álgebra, que desde esta época não tinha feito quase nenhum progresso, avançou no século XVI principalmente através da obra do matemático francês François Viète (1540-1603). Na obra *In Artem Analyticam Isagoge*, Viète chamou sua álgebra simbólica de *logistica speciosa* em oposição à *logistica numerosa*, e esta distinção, segundo Kline (1990), traçou uma linha divisória entre a álgebra e a aritmética. René Descartes (1596-1650), mais tarde, usou as primeiras letras do alfabeto para quantidades conhecidas e as últimas letras para as desconhecidas, como fazemos até hoje (Kline, 1990).

Descartes escreveu sua única obra matemática, *La Géométrie,* como um apêndice do *Discours de la méthode,* publicado em 1637, onde expõe suas idéias científicas e filosóficas. Em *La Géometrie*, Descartes, assim como Viète, utilizou a álgebra como ferramenta para a resolução de problemas geométricos. As grandes inovações foram a associação de curvas a equações algébricas e o uso de um sistema de coordenadas para relacionar as variáveis envolvidas naquelas equações, procedimentos que deram origem ao que chamamos hoje de geometria analítica.

Pierre de Fermat (1601-1665), que contribuiu para o desenvolvimento da teoria dos números, da teoria das equações, da geometria analítica e do cálculo, segundo Kline (1990), estava familiarizado com o trabalho de Viète com relação ao uso da álgebra para resolver problemas geométricos. No seu estudo de curvas, Fermat utilizou um sistema de coordenadas e relacionou as duas variáveis que apareciam no final de uma equação a partir do seguinte princípio: *"Sempre que numa equação final encontram-se duas quantidades incógnitas, temos um lugar, a extremidade de uma delas descrevendo uma linha reta ou curva"* (Boyer, 1991). A relação entre as incógnitas é estabelecida através de um lugar geométrico, isto é, o que conhecemos hoje como expressão algébrica de uma função, tanto para Fermat como para Descartes, era uma curva.

Segundo Kline (1990), a definição mais explícita de função do século XVII foi dada por James Gregory em 1667, que definiu função como *"uma quantidade obtida de outras quantidades pela sucessão de operações algébricas ou por qualquer outra operação imaginável"*. Para Gregory, esta outra *operação imaginável* era a passagem ao limite, que só seria completamente esclarecida posteriormente.

O estudo de curvas, devido à sua aplicabilidade à ciência, era fundamental para os matemáticos do século XVII. O estudo das diversas variáveis associadas a uma curva (por exemplo, a tangente num ponto, a área sob a curva, o comprimento e a velocidade de um ponto ao longo de uma curva) os levou a estabelecer relações entre estas variáveis. Grandes matemáticos deste tempo como Boaventura Cavalieri, Gilles Roberval, John Wallis e Isaac Barrow estudaram a variação destas grandezas associadas a curvas. Em particular, Fermat, Barrow, James Gregory, Evangelista Torricelli chegaram a perceber que o problema da determinação da tangente era inverso ao do cálculo da área sob a curva, mas não perceberam de imediato a generalidade ou a importância deste resultado. De qualquer modo, estes matemáticos prepararam o terreno para que Newton e Leibniz estabelecessem os fundamentos do Cálculo.

A primeira contribuição de Isaac Newton (1642-1727) para o desenvolvimento do conceito de função, e que esteve presente na sua construção do Cálculo, foi seu trabalho com séries infinitas. Segundo Boyer (1991), Newton descobriu algo muito mais importante do que o Teorema Binomial, ao verificar que a análise através de séries infinitas possuía tanta consistência quanto a álgebra aplicada a quantidades finitas. As séries infinitas não seriam mais consideradas instrumentos de aproximação, mas uma outra maneira de escrever as funções que representavam.

A primeira publicação, em 1687, envolvendo suas idéias sobre o Cálculo foi *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural.* Apesar de não ser uma obra estritamente matemática, segundo Kline (1990), o que Newton desenvolveu no Cálculo foi em grade parte motivado pelo seu interesse nos problemas de física tratados neste livro. Em três obras escritas anteriormente e que seriam publicadas apenas no século XVIII, Newton já havia iniciado o desenvolvimento do cálculo: *Análise através de Equações com um Número Infinito de Termos*, escrita em 1669, *O Método de Fluxões e Séries Infinitas*, escrita em 1671, e *Quadratura de Curvas,* em 1676. Na primeira obra, Newton mostrou que a área sob uma curva poderia ser determinada pelo processo inverso do cálculo da taxa de variação. Apesar de a validade deste resultado ter sido observada anteriormente, Newton foi o primeiro que percebeu sua generalidade. O *Método dos Fluxões* foi aplicado a variáveis (*fluentes*) para o cálculo da taxa de variação (*fluxos*). O que chamamos hoje de expressão algébrica de uma função era para Newton a relação entre os fluentes.

Apesar de a primeira publicação do Cálculo de G. H. Leibniz (1646-1716) ter sido feita em 1684, ele vinha redigindo informalmente, desde 1673, notas que continham suas idéias. Uma de suas primeiras notas mostravam uma forma de relacionar somas e diferenças entre termos de uma seqüência, que foram a base para o estabelecimento de seu *Calculus Summatorius* ou *Calculus Integralis* e o *Calculus Differentiallis*, expressões criadas por Leibniz. Ao longo de suas obras, criou notações, como um S longo $\int$ para integral, e estabeleceu fórmulas para derivadas e integrais de diversas funções. Leibniz introduziu o uso das palavras "constante", "variável" e "parâmetro".

3.

Conforme já observamos, os principais objetos de estudo no século XVII eram as curvas e seus conceitos associados. As variáveis associadas a uma curva eram geométricas, e, em 1673, Leibniz utilizou pela primeira vez a palavra "função" para indicar quantidades que variavam ao longo de uma curva, por exemplo, a tangente. Segundo Kliner (1989), este interesse em curvas fez também com que os matemáticos voltassem sua atenção para os símbolos que apareciam nas fórmulas e equações, independente das curvas originais que estas equações representavam.

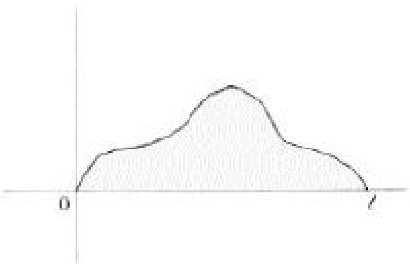
Johann Bernoulli (1667-1748) experimentou várias notações como X, ξ e finalmente ϕx para uma função de x. Em 1718, Bernoulli definiu função da seguinte maneira:

Chamamos aqui Função de uma grandeza variável, uma quantidade composta de qualquer maneira desta grandeza variável e de constantes (Rüthing, 1984).

Para Bernoulli, cada função poderia ser representada por uma única expressão analítica, podendo-se observar na definição acima o conceito de função como combinação de símbolos algébricos. Esta "expressão analítica" aparece na definição de função dada por Leonhard Euler (1707-1783) em seu clássico *Introductio in Analysin Infinitorum*, de 1748, primeira obra em que o conceito de função desempenha um papel central. Após definir o significado de *quantidade constante* e *quantidade variável*, Euler enunciou, em 1748: *"uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de alguma maneira desta quantidade variável e números ou quantidades constantes"* (ibid.). Euler não definiu "expressão analítica", mas, segundo Boyer (1991), tinha em mente funções algébricas e as funções transcendentes elementares (exponenciais, logarítmicas e trigonométricas).

Um longo debate sobre um problema da corda vibrante envolvendo Euler, d'Alembert, Daniel Bernoulli e Lagrange acerca do significado de "função" provocou um novo entendimento sobre o conceito. O problema é o seguinte:

Uma corda elástica com os extremos fixos, por exemplo em 0 e l é deformada numa posição inicial F e solta, provocando vibrações. O problema determinar a função que descreve o formato da corda em um instante t.



O debate durou vários anos e, segundo Kliner (1989), teve importantes conseqüências na evolução do conceito de função. O conceito foi estendido, de modo a abranger:

a) Funções definidas por expressões analíticas diferentes em diferentes intervalos.
b) Funções desenhadas à mão livre e que, possivelmente, não eram dadas por combinações de símbolos algébricos.

Quanto ao termo "expressão analítica", este não aparece na definição de função que Euler deu em 1755: *"se x denota uma quantidade variável, então todas as quantidades que dependem de x ou são determinadas por ele são chamadas suas funções"* (Rüthing, 1984). Euler é responsável pela introdução, em 1734, da notação *f(x)* para designar uma função que depende da variável *x*.

Em 1797, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) definiu função: *Chamamos função de uma ou várias quantidades toda expressão para cálculo na qual estas quantidades entram de uma maneira qualquer, envolvidas ou não com outras quantidades que consideramos como sendo dadas e valores invariáveis, enquanto as quantidades da função podem assumir todos os valores possíveis. ... Designaremos em geral pela letra f ou F, colocada antes da variável, toda função desta variável, isto é, toda quantidade que depende desta variável e que varia com ela segundo uma lei dada* (ibid.). Podemos observar tanto na definição de Lagrange como na de Euler (1755) a presença da idéia de função como relação entre quantidades variáveis.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) em seu *Cours D'Analyse*, obra publicada em 1821, definiu os conceitos de função contínua, diferenciável e integrável a partir da noção de limite. Segundo Silva (1999), Cauchy foi o principal responsável pela transformação do cálculo diferencial e integral de variáveis (de Newton e Leibniz) no cálculo diferencial e integral de funções, como temos hoje. Sua definição de função é semelhante às enunciadas anteriormente.

Os matemáticos do século XVIII exploraram o uso de séries trigonométricas relacionadas aos fenômenos astronômicos devido à sua periodicidade. Estas séries foram estudadas por Joseph Fourier (1768-1830) em sua *Teoria Analítica do Calor*, publicada pela primeira vez em 1822, o que provocou uma revisão no conceito de função. O principal resultado matemático de Fourier nesta obra, de acordo com Kliner (1989), é o seguinte:

Toda função f(x) definida no intervalo ($-\ell$, ℓ) pode ser representada neste intervalo por uma série de senos e cosenos:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{\ell}\right], \textit{onde } a_n \textit{ e } b_n \textit{ são dados por}$$

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos\frac{n\pi t}{\ell}dt \qquad e \qquad b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\, sen\frac{n\pi t}{\ell}dt$$

Este resultado não era totalmente correto, e matemáticos como Gustav Lejeune Dirichlet (1804-1859), nos anos seguintes, iriam fornecer condições para que uma função pudesse ser representada como uma série de Fourier num dado intervalo. Mas o resultado de Fourier mostrou que uma grande quantidade de funções f(x) (não necessariamente periódicas) poderiam ser representadas com outra expressão analítica (a sua série de Fourier) num dado intervalo. Segundo Luzin (1998), a descoberta de Fourier mostrou que muito da controvérsia surgida no debate sobre o problema da corda vibrante - cuja solução era dada por uma série trigonométrica - foi resultado da confusão entre dois conceitos aparentemente idênticos, mas bem diferentes: os conceitos de "função" e de "sua representação analítica".

A definição de função dada por Dirichlet é a seguinte:

Suponhamos que a e b são dois valores dados e x é a quantidade variável que assume, gradualmente, todos os valores localizados entre a e b. Se para cada x corresponde um único y, de modo que, enquanto x percorre o intervalo de a até b, y = f(x) varia gradualmente da mesma forma, então y é chamada função contínua de x para este intervalo. Além disso, não é absolutamente necessário que y dependa de x no intervalo inteiro de acordo com a mesma lei; sem dúvida, não é necessário pensar somente em relações que possam ser expressas através de operações matemáticas (Rüthing, 1984).

Dirichlet foi o primeiro a estabelecer o conceito de função como uma relação arbitrária entre as variáveis, independente de fórmulas algébricas. Para mostrar a natureza arbitrária desta relação, definiu a função:

$$f(x) = \begin{cases} c, \text{ se } x \text{ é racional} \\ d, \text{ se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

Foi o primeiro exemplo de uma função que não era representada por uma fórmula – combinação de símbolos matemáticos. O matemático inglês George Stokes (1819-1903), acompanhando o entendimento de Dirichlet, percebeu a importância de "pensar em funções independentes de todas as idéias de expressão algébrica" (Silva, 1999).

A interpretação do conceito de função como *transformação*, onde cada elemento x é transformado no elemento f(x), foi dada por George Boole (1815-1864):

Qualquer expressão algébrica envolvendo o símbolo x é chamada uma função de x e pode ser representada sob a forma geral abreviada f(x). ... Nestes mesmos princípios de notação, se em alguma função transformarmos x em 1, o resultado será expresso pela forma f(1); se na mesma função transformarmos x em 0, o resultado será expresso pela forma f(0) (Rüthing, 1984).

Richard Dedekind (1831-1916) utilizou a idéia de *aplicação* para definir o conceito de função:

Em uma aplicação de um sistema S uma lei é entendida, de acordo com a qual cada elemento s de S está associado a um determinado objeto que é chamado a imagem de s e denotada por $\phi(s)$; dizemos também que $\phi(s)$ corresponde ao elemento s, que $\phi(s)$ é originada ou gerada pela aplicação ϕ, que s é transformado em $\phi(s)$ pela aplicação ϕ (ibid.).

Na definição de função dada por G.H. Hardy (1877-1947) foram enumeradas três características que devem ser satisfeitas por uma função determinada pela relação entre duas quantidades variáveis x e y:

(1) y é sempre determinado por um valor de x;

(2) para cada valor de x para o qual y é dado, corresponde um e somente um valor de y;

(3) a relação entre x e y expressa através de uma fórmula analítica, na qual o valor de y que corresponde a um dado valor de x pode ser calculado por substituição direta de x. (Silva, 1999)

Uma tradução da definição de Hardy para a linguagem dos conjuntos foi dada por Bourbaki em 1939:

Sejam E e F dois conjuntos distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F é dita uma relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se, para qualquer $x \in E$ existe um único $y \in F$, e apenas um, que está na relação dada com x. Damos o nome de função à operação que associa a todo elemento $x \in E$ o elemento $y \in F$ que se encontra na relação dada com x; dizemos que y é o valor da função para o elemento x, e que a função é determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função (Rüthing, 1984).

Podemos verificar através deste breve histórico que o conceito de função passou por diversas mudanças e que sua construção foi bastante lenta. Identificamos também algumas representações na evolução do conceito de função através de sua história: função como relação entre quantidades variáveis, como expressão analítica, como relação entre conjuntos e como transformação.

4. Conclusão

A idéia central do conceito de função, presente tanto no nascimento da física quantitativa quanto em nosso cotidiano, é a de relação entre quantidades variáveis. Não pensamos em fórmulas matemáticas ou em subconjuntos de um produto cartesiano quando compramos um produto. O que fazemos é relacionar a quantidade comprada com o preço a ser pago através do conhecimento que temos sobre a maneira com que estas grandezas, *quantidade* e *preço,* variam.

O estudo da maneira como ocorre a variação das grandezas, por ter participado de forma decisiva na construção de um método para a ciência e na própria evolução da matemática devem estar presentes de alguma maneira no ensino de funções.

REFERÊNCIAS:

BOYER, C. *História da Matemática.* 2ª edição. São Paulo: Edgard Blücher, 1991.

CARAÇA, B. de J. *Conceitos Fundamentais da Matemática.* 9ª edição. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1989.

KLINE, M. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, v.1, Oxford University Press, 1990.

KLEINER, I. Evolution of the Function Concept: A Brief Survey. *The College Mathematics Journal*, v.20, n°4, 1989, p. 282-300. 1989. Disponível em <http://www.maa.org/pubs/Calc_articles/ma001.pdf>. Acesso em 5/12/2004.

LUZIN, N. Function. *The American Mathematical Monthly*. Jan e Mar, 1988.

RÜTHING, D. *Some Definitions of The Concept of Function from Joh. Bernoulli to N. Bourbaki.* The Mathematical Intelligencer, vol. 6 , n° 4, 1984, p. 72-77.

SILVA, M. H. M. e REZENDE, W. M. Análise histórica do conceito de função. *Caderno Dá Licença.* Instituto de Matemática. Universidade Federal Fluminense. v.2. p. 28-33. Niterói, 1999.