GRAFOS, LIVROS DIDÁTICOS E NOVOS TEMAS

Jorge Bria
Instituto de Matemática
Universidade Federal Fluminense
jbria@terra.com.br

Leandro Q. de Freitas
Instituto de Matemática
Universidade Federal Fluminense
leouff@click21.com.br

GRAFOS, LIVROS DIDÁTICOS E NOVOS TEMPOS

Resumo: *Este artigo apresenta, dando continuidade e fortalecimento ao processo de divulgação da proposta do primeiro autor (tese de doutorado) "Grafos para Educação Básica", citações de situações-problema modeláveis em grafos que já podem ser encontradas em livros didáticos (não explicitando o termo "grafo") e novos exemplos das amplas possibilidades do tema. Inicia-se com noções básicas sobre grafos para leitores sem qualquer iniciação anterior.*

Palavras-chave: *1. Grafos 2. Modelagem 3. Educação Básica 4. Livros didáticos.*

Abstract: *This article presents, giving continuity and fortification to the proposal spreading process of the first author (doutorado thesis) "Graphs for Basic Education", problem-situation citations shapeable in graphs that already can be found in educational books (although not specifying the term "graph") and new examples of the ample possibilities on this subject. It begins with basic ideas about graphs to readers without any previous initiation.*

Key words: *1. Graphs 2. Modeling 3. Basic education 4. Educational books.*

Introdução

Quando o primeiro autor deste artigo publicou dentro do tema geral "Grafos para a Educação Básica" (BRIA, 1998), (BRIA, 2000) e (BRIA, 2001), nesta (tese de doutorado) de forma inédita no país enquanto proposta fundamentada e submetida a experimento junto a alunos do Ensino Fundamental com resultados produtivos comprovados, já apostava na repercussão positiva da iniciativa e em ações concretas a partir desta logo nos anos seguintes, evidenciando as totais viabilidade e oportunidade da adoção dos grafos na Educação Básica em consonância com as principais conclamações para o ensino da Matemática na Escola frente às novas exigências ou apelos da atualidade. De fato, as manifestações de apoio recebidas de professores de inúmeros municípios do estado RJ e a constatação da forma crescente com que nos últimos anos vem sendo tal tema objeto de estudo e aplicação por parte de professores e/ou pesquisadores, monografias ou dissertações de Pós-Graduação, apresentação de trabalhos em congressos de Educação Matemática, bem como exploração de situações-problema (contextualização) modeláveis em grafos em livros didáticos mesmo que em geral sem referência explícita ao termo "grafo", não deixa margem a dúvidas.

Junta-se agora ao primeiro autor um de seus orientandos bolsistas no projeto de extensão "Educação Matemática: Indo Além dos Livros" (UFF) que, com seu interesse e competente dedicação a "Grafos para Educação Básica", facilitou pesquisa no tema integrada às demais atividades e contribuiu para promissora parceria que culminou na elaboração deste artigo, primeira divulgação pública de nosso trabalho conjunto.

O artigo traz idéias básicas da Teoria dos Grafos a leitores leigos no assunto e, de imediato, faz referência a situações-problema já exploradas em livros didáticos com modelagem (em geral, só implícita) em grafos. Após isto, damos novos exemplos que, certamente, instigarão o leitor e buscam contribuir ainda mais ao avanço do processo da previsível consolidação da adoção dos *grafos e suas aplicações* na Educação Básica.

Idéias Básicas em Grafos

Problema Inicial para Estimulação: Um carteiro, deslocado a trabalhar em região que não conhecia (figura 1), quer descobrir percurso para entrega da correspondência diária em que, saindo do posto dos Correios, passe por todas as ruas, nunca passe por trecho de rua (entre duas esquinas consecutivas) pelo qual já tenha passado e, quando da entrega na última rua, já esteja voltando ao posto inicial. Para tal região, isto é possível?

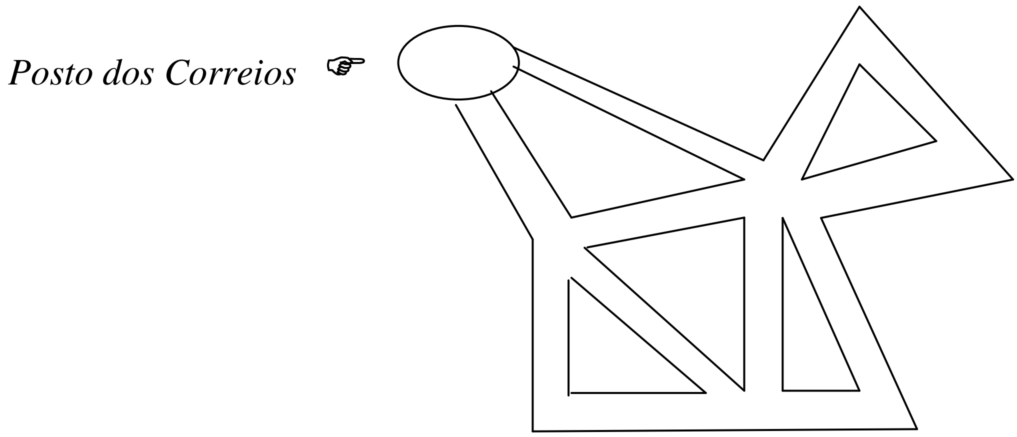


Figura 1

Representemos o Posto dos Correios por A, as (outras) sete esquinas respectivamente pelas letras de B até H, bem como os trechos de ruas entre duas esquinas consecutivas por linhas, como na figura 2. Sem "rodeios" (neste artigo não priorizamos o formalismo dos conceitos), ao termos assim procedido, dizemos que partimos de uma **situação-problema** concreta e a representamos por um **grafo**, neste caso com **vértices** A, B, C, D, E, F, G e H, e **arestas** AB, AF, BC, BD, BF, CD, FD, FE, DE, FG, FH e GH. Trata-se assim de um caminho para a resolução da situação-problema proposta com base numa **modelagem** em grafos para ela, razão pela qual nos referimos ao que se vê na referida figura como um **grafo-modelo** da mesma. Este grafo-modelo, por exemplo, não possui aresta AH pois A e H não são vértices que representam esquinas consecutivas (limites de um mesmo trecho de rua). Completando, AFBDFG é um **percurso** por arestas desse grafo e o **grau** (número de arestas que chegam num vértice) do vértice A é 2, bem como o de F é 6, e em tal grafo nenhum dos oito vértices tem grau ímpar. Acrescentemos mais uns poucos conceitos: **vértices adjacentes** são quaisquer dois vértices ligados por alguma aresta, **grafo conexo** é todo aquele no qual existe um percurso conectando qualquer par de vértices que se escolha, **caminho** é percurso sem repetição de vértices, **ciclo** é caminho fechado (isto é, onde o vértice final coincide com o inicial), **árvore** é qualquer grafo conexo sem ciclos.

Que o leitor note que as ligações na figura 2, feitas com segmentos, poderiam ser linhas quaisquer (curvas), mesmo sendo os trechos de ruas dados retilíneos, pois o que importa é representarmos fielmente (seja qual for a forma gráfica) que pares de vértices devem relacionar-se; no caso, quais representam duas esquinas consecutivas. Note também, se já familiarizado com questões topológicas em Matemática, que em grafos, em princípio, não se levam em conta variáveis de forma ou tamanho de arestas, podendo inserir-se no ramo da Topologia, mas não da Geometria (Euclidiana, por exemplo)!!!

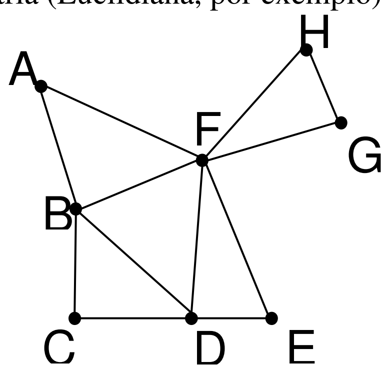


Figura 2

Para a resolução do problema dado, agora de posse de um grafo-modelo correspondente, procura-se traduzir a questão proposta à "linguagem dos grafos", ou seja, neste caso, "existe um percurso pelo grafo que comece no vértice A, passe por todas as arestas e, sem repetir nenhuma, assim volte ao vértice inicial?". Já dentro da Teoria dos Grafos, com seus diversos tópicos e subtópicos, cada um contendo inúmeros conceitos e resultados, analisa-se quais destes poderiam aplicar-se na questão que queremos resolver. O problema 1, por exemplo, envolve o tópico *questões eulerianas* e podemos recorrer exclusivamente ao resultado (aqui em formulação simples, suficiente para o que estamos abordando) "a condição necessária e suficiente para a existência de um percurso num grafo passando por todas as arestas, não repetindo nenhuma e voltando ao vértice inicial é que todos os seus vértices tenham grau par".

Os vértices A, B, C, D, E, F, G e H no grafo da figura 2 possuem, respectivamente, graus 2, 4, 2, 4, 2, 6, 2 e 2 (números pares) e, portanto, um tal percurso existe. O carteiro poderia optar, por exemplo, pelo percurso ABCDBFDEFGHFA.

O grafo da figura 2 poderia estar modelando situações-problema bem distintas da proposta no problema do carteiro. Os vértices de A até H poderiam representar pessoas e arestas indicarem que pessoas se conhecem duas a duas. Teríamos, por exemplo, que A e F são pessoas que se conhecem, mas A e H não, e F a pessoa mais conhecida no grupo. A questão não seria do tipo "é possível passar por...", mas talvez sobre relações pessoais no grupo. Vértices poderiam indicar cidades, arestas estradas com questão sobre roteiros de ônibus em que a empresa responsável quisesse minimizar custo total de combustível e preço da passagem. E vértices sendo estados de um país com arestas indicando estados com fronteira entre si, por que não? Neste caso, por exemplo, estaria indicado que os estados A e F fazem fronteira entre si, mas A e H não. Nessa linha envolve-se a questão da coloração de mapas. O leitor poderá criar inúmeros outros exemplos em diferentes contextos a partir do grafo da figura 2 e é exatamente essa versatilidade que faz dos grafos poderoso instrumento para modelagem de situações-problema concretas, como as do cotidiano do aluno... Ênfase em contextualização!!!

Algumas situações-problema já encontradas em livros didáticos

Neste item, todos os livros a que nos referimos são de 5ª a 8ª do Ensino Fundamental e, sempre que declaramos "o livro usa em seu exemplo tal conceito em grafos" ou similares, fique claro para o leitor que, na maioria das vezes, o autor não faz menção explícita ao termo "grafo" ou a qualquer conceito da Teoria dos Grafos. Enfatizamos que as situações citadas neste item envolvem predominantemente componente CONTEXTUALIZAÇÃO na Educação Básica e esclarecemos que foi proposital nossa opção por referências aqui a livros de 5ª a 8ª. De fato, para Ensino Médio, Técnico ou similares, a viabilidade e oportunidade na atualidade (ou até o possível já exercício, dependendo do texto ou objetivos do curso de formação) da abordagem de modelagens em grafos na Escola já é inquestionável, entre outros, pela natural associação dos grafos com Combinatória e pelo forte potencial dos grafos para o exercício da INTERDISCIPLINARIDADE ou TRANSVERSALIDADE... Grafos aplicam-se em jogos clássicos (dominó, xadrez, baralho...), jogos matemáticos, organização de torneios esportivos, Eletrônica, Telecomunicações, redes (de computadores, por exemplo), Engenharia Civil, Ecologia, Genética, Lingüística, distribuição de serviços (água, luz, gás), transportes...

Em (DANTE, 2004), 6ª série, já podemos perceber a inserção implícita da idéia de grafo quando se aborda o conceito de coloração de formas planas.

Em (BIGODE, 2000), 8ª série, são apresentados o problema dos apertos de mãos, que se associa à noção de grafo completo, e o clássico problema das 4 cores.

Em (DI PIERRO NETTO, 1999), 6ª série, envolvem-se conceitos de grafos (questão euleriana) num desafio que é proposto a partir da figura de um labirinto.

Em (SPINELLI, SOUZA, 2001), 5ª série, há o problema de contagem, associável a grafos, das possíveis opções de deslocamento dados três locais e meios de transporte.

Sobre contagem (combinatória) pode-se propor também, entre inúmeros outros, o problema "quantas duplas podemos formar com 8 alunos?"... Cada aluno num vértice, e arestas indicando as duplas formadas, assumindo que todo aluno pode fazer dupla com qualquer outro, resulta um **grafo completo** (grafo possuindo todas as arestas possíveis).

Em (IEZZI, DOLCE, MACHADO, 2000), 8ª série, dá-se problema de descobrir o número de equipes num torneio escolar em que houve 91 jogos e cada par de equipes enfrentou-se só uma vez, ainda resgatando (implicitamente) a noção de grafo completo.

Em (IMENES; JAKUBOVIC; LELLIS, 1999), 6ª série, dá-se conjunto de vértices, cada um representando um número ainda desconhecido, com cada aresta indicando uma operação aritmética, e pede-se para formar um ciclo e descobrir quais são os números.

Em (DANTE, 2004), 5ª série, há figura plana só com segmentos, uns se cruzando, e propõe-se ao aluno que, mantendo ligados (não mais necessariamente por segmentos) todos os pares de pontos que assim estão (e só estes), "redesenhe a figura" sem cruzar linhas nem tirar o lápis do papel. Exploramos tal problema mais adiante neste artigo.

Alguns exemplos de modelagem em grafos

Sugerimos logo ao leitor busca, a partir de nossa vasta lista em "Referências e Indicações Bibliográficas", de tantos exemplos já existentes, a maioria deles clássicos (consagrados mundialmente), relevantes, educativos, desafiadores...

Exemplo 1:

Um **grafo orientado** é todo aquele em que se atribui sentido a cada aresta e **laço** num grafo é qualquer aresta "ligando" um vértice a ele mesmo. Assim, na figura 3 (setas curvadas e cheias estão indicando laços), vê-se um grafo orientado com 4 laços.

Como poderíamos modelar o problema "visualize simultaneamente todos os divisores de certos números inteiros dados?". Fácil a resposta... Através de um grafo orientado, a própria figura 3 dá-nos a total visualização dos divisores dos números 2, 8, 10 e 16. Vértices representam os números dados e cada aresta orientada indica que o número (vértice) do qual ela parte é divisor do número (vértice) ao qual ela chega.

É bastante natural a visualização do processo original (o conceito) de obtenção do máximo divisor comum (MDC) de certos números inteiros dados. Relativamente a este problema geral ("visualize o processo de obtenção de um MDC"), o grafo da figura 4 permite-nos "ver" – a memória visual é fortíssima e figuras são o que mais se pode realçar em grafos, pelo menos quando os imaginamos na Educação Básica – que o MDC dos números 10 e 16 é igual a 2, assim como o de 5 e 8 é igual a 1.

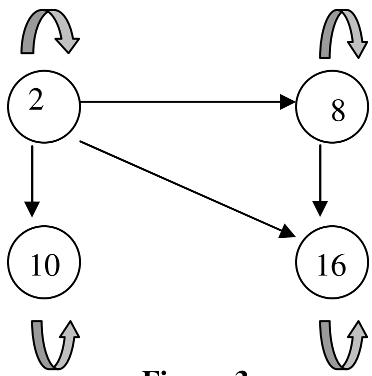


Figura 3

Dê-se especial atenção à visualização de números primos entre si (como 5 e 8)!!! E mais... O caro leitor poderia responder, ainda neste tipo de modelagem do processo de obtenção do MDC, se o fato de dois números serem primos entre si guarda relação com o de o grafo-modelo correspondente ser ou não conexo?

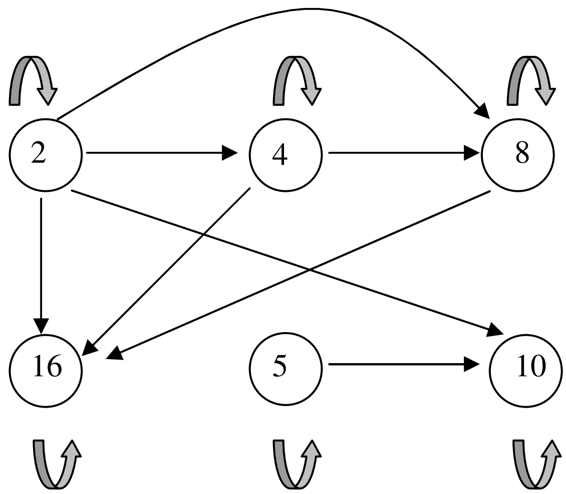


Figura 4

Com raciocínio nessa linha, poderíamos abordar em grafos o processo original (o conceito) de obtenção do mínimo múltiplo comum (MMC) de inteiros dados? Como?

<u>Exemplo 2</u>:

De (DANTE, 2004): "A figura 5 pode ser desenhada sem tirar o lápis do papel e sem fazer cruzamentos? Tente!"... Claro que o autor adaptou (simplificou) a linguagem às possibilidades da clientela (5ª série), devendo entender-se a questão como se é possível em novo desenho manter ligados todos os pares de pontos que assim foram apresentados, e só estes, traçando linhas que substituam algumas da figura 5, não mais necessariamente segmentos de reta, sem que haja mais cruzamentos de linhas, ao que já nos referimos como "redesenhar" a figura (de modo a satisfazer tal propriedade).

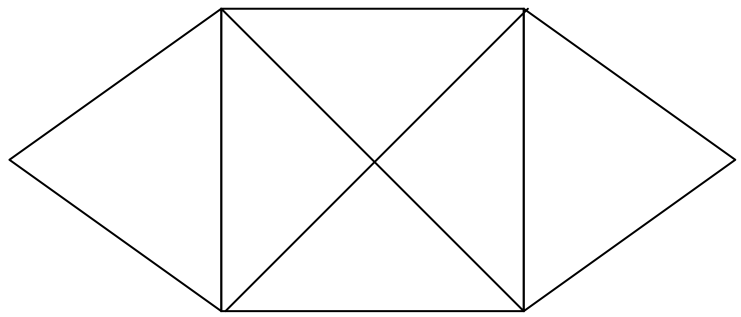


Figura 5

Além de possível intenção adicional do autor em abordar implicitamente questões de ordem euleriana (associadas ao fato de não se poder tirar o lápis do papel), recai o problema num tópico de alta relevância em grafos, que é Planaridade, que se aplica fortemente na elaboração do projeto de um circuito impresso (em Eletrônica; uma placa de computador, por exemplo). Numa linguagem propositadamente simples (informal) neste artigo, estabeleçamos que **<u>grafo planar</u>** é todo aquele que se apresenta sem cruzamentos de arestas ou que pode ser "redesenhado" sem tais cruzamentos.

O grafo da figura 5 é planar, podemos redesenhá-lo sem cruzamentos de arestas como se vê na figura 6 e, portanto, tal figura exibe um dos infinitos modos possíveis com que o aluno poderia fazer o desenho satisfazendo à exigência imposta.

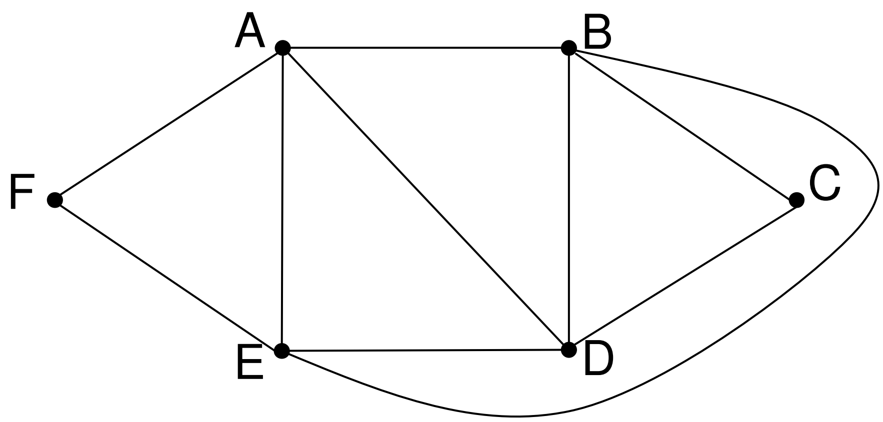


Figura 6

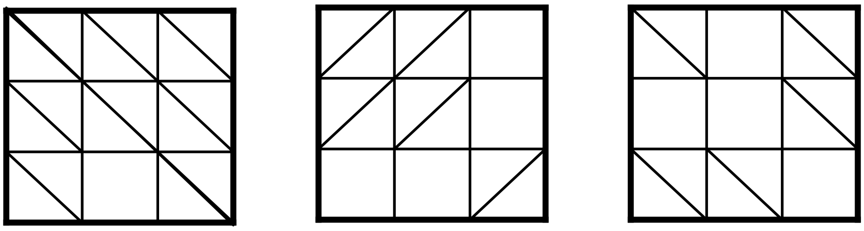
<u>Exemplo 3</u>:

A partir da 5ª série, a exploração de contornos de figuras geométricas, entre outros, leva o aluno a conhecer melhor formas importantes como triângulo, quadrado, retângulo... Há livros didáticos, inclusive, que chegam a explorar mosaicos, e grafos também podem ser utilizados em estudos sobre estes. Mas, voltando ao verdadeiro objetivo do Exemplo 3, uma das principais características de um triângulo é sua rigidez. Para ser mais exato, o triângulo é o único polígono rígido. A rigidez de um triângulo possui diversas aplicações como, por exemplo, na construção de portões, madeiramento de telhados, estruturas de engenharia... Neste ponto, o leitor pode estar com pensamentos do tipo "não entendi bem o que é rigidez de uma figura, o que é afinal?". Damos a seguir uma visão intuitiva a respeito.

Imaginemos um portão a ser feito com 4 ripas de madeira, duas com tamanho x (frente), as outras com tamanho y (altura), com x maior do que y, pois o portão deverá ser retangular e mais comprido que alto. Seu dono passa a construí-lo, então, simplesmente tomando 4 pregos e prendendo cada um na extremidade de cada par de ripas (fixando uma à outra). Cada prego estará num vértice do imaginado retângulo. Feito o portão, no entanto, ainda sem fixá-lo no local a que se destina (imagine-o no chão onde acabou de ser construído), se uma pessoa chegar e imprimir alguma força rodando toda a estrutura de um ângulo qualquer (para direita, por exemplo), o construtor do portão fará a desagradável constatação de que o retângulo terá se transformado em paralelogramo (de lados não perpendiculares) e, o que é pior, seu portão terá se deformado sem rachar uma ripa sequer, vendo seu projeto inicial não estar mais ali e, de modo sintomático em sentido nada desejável, percebendo (imaginando o portão já posto no local pretendido e os riscos que se implicariam) o quanto é instável a estrutura que construiu, pois a mesma não é uma estrutura rígida... O retângulo não é rígido!!! Um portão triangular seria bastante estranho mas, sem dúvida, ninguém conseguiria fazer com ele o que descrevemos (deformá-lo) relativamente ao portão retangular. Se tentasse fazê-lo, dependendo da força que se imprimisse, certamente quebraria uma ripa... Triângulos são polígonos rígidos!!!

Uma nova pergunta... O leitor seria capaz de dar definição matemática precisa, exclusivamente no contexto da Geometria Euclidiana, para *estrutura rígida*? Restrinja-se a estruturas que sejam conjuntos de polígonos. Ou restrinja mais... Defina *polígono rígido* e, daí, conclua formalmente que os únicos polígonos rígidos são os triângulos.

A questão geral, no entanto, objetivada no Exemplo 3, vai além disso. Um bom modo de dar estabilidade e maior segurança ao portão que se quer construir é fazê-lo sob a forma de estruturas do tipo do que se vê na figura 7 (não estamos afirmando que as três estruturas nela exibidas são rígidas), isto é, fixando ripas menores como diagonais de alguns retângulos, a serem escolhidos após análise. Claro que poderíamos fixar tais ripas em todas as diagonais dos retângulos menores, mas se coloca uma questão adicional, que é minimizar o gasto de madeira e pregos necessários ainda mantendo a estrutura rígida.



(a) (b) (c)

Figura 7

Não é difícil verificarmos que, da figura 7, apenas as estruturas (a) e (c) são rígidas, se nos valemos de certo resultado em grafos (aqui não demonstrado). Mas precisamos primeiramente fazer a modelagem em grafos do problema. Associando cada estrutura dessas a uma "matriz" (cada fileira horizontal como se fosse uma linha da matriz, cada fileira vertical como se uma coluna), vemos que as três estruturas correspondem a matrizes 3x3. Agora, representemos por um vértice cada fileira da estrutura (ou matriz), implicando 9 vértices. Mas temos que entender bem como serão escolhidas as arestas e, para tal, voltemos a atenção apenas para a estrutura (b) e ao seu respectivo grafo-modelo visto na figura 8, que aprenderemos agora a construir... Por exemplo, como no retângulo comum à 1ª linha (L1) e à 1ª coluna (C1), está traçada a diagonal (há uma ripa), tracemos a aresta de L1 a C1, bem como pela mesma razão traça-se a aresta de L1 a C2, e assim por diante. No entanto, por exemplo, não há diagonal comum à 1ª linha e à 3ª coluna, nem diagonal na 3ª linha e 2ª coluna, não haverá as arestas de L1 a C3, nem de L3 a C2, e assim por diante. Usando tal estratégia, a figura 8 mostra-nos os respectivos grafos-modelo das três estruturas dadas na figura 7.

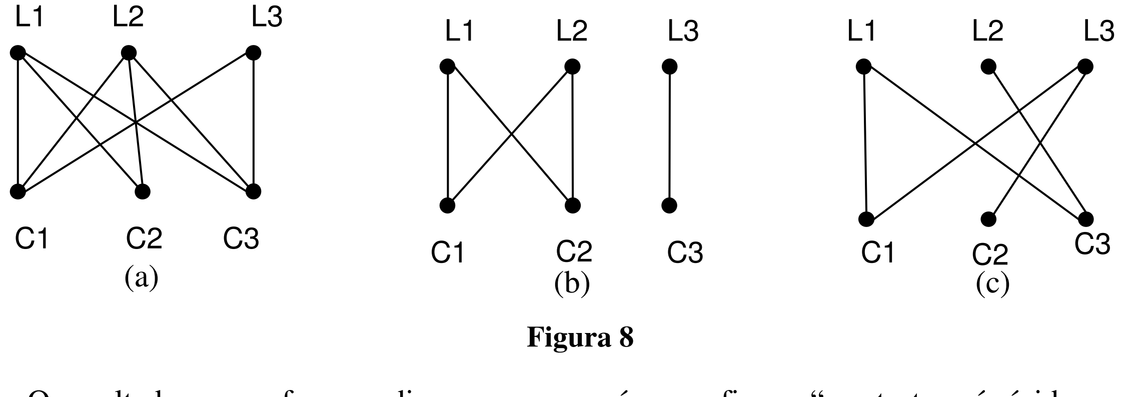


Figura 8

O resultado em grafos que dizemos que usaríamos afirma: "a estrutura é rígida se seu grafo-modelo é conexo" e, assim, só as estruturas (a) e (c) são rígidas.

A questão adicional, que é a de construir estruturas rígidas com o menor gasto possível, resolve-se removendo da estrutura o maior número possível de arestas tal que, evidentemente, ainda se mantenha o grafo conexo. Para isso, o leitor deve observar que o grafo correspondente à estrutura (a), por exemplo, contém vários ciclos. Um deles é L1C2L2C1L1 e, se deste removemos L1C1 e L2C2 (desfaz-se tal ciclo), o grafo permanece conexo e, portanto, mantém-se rígida a estrutura. Devemos prosseguir usando este mesmo raciocínio, isto é, em vez de eliminar arestas aleatoriamente, buscar fazê-lo eliminando ciclos... Há ainda o ciclo C1L2C3L3C1 e, se deste removemos L3C1, ainda resta um grafo conexo e continuamos com a estrutura rígida. Só que este último grafo não possui mais ciclos (este grafo é uma árvore!!!), qualquer nova aresta que tentássemos retirar implicaria desconectar o grafo e, então, é este o grafo que representa a estrutura rígida de menor custo possível, que pode ser visto na figura 9. Em resumo, buscamos tal estrutura diminuindo o grafo até tornar-se uma árvore, já definida como sendo um grafo conexo sem ciclos, sendo o tipo de grafo mais "econômico" no sentido de desconectar-se pela simples retirada de uma única (qualquer) de suas arestas.

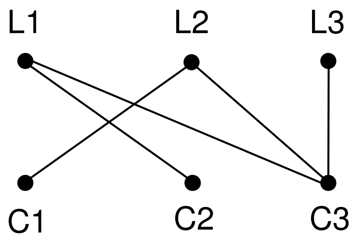


Figura 9

<u>Exemplo 4</u>: *O Jogo das Arestas*

Criamos um jogo, a ser jogado por duas pessoas, simples mas interessante no sentido de abordar alguns conceitos básicos em grafos, o qual denominamos *Jogo das Arestas*, que passamos a descrever.

Inicialmente, escolhe-se um certo número de pontos a serem marcados numa folha de papel, preferencialmente formando linhas e colunas, respectivamente horizontais e verticais, para melhor abordagem visual do jogo, como se vê nas figuras 10, 11 e 12.

Começando o jogo, um dos participantes escolhe um par de vértices e liga-os com uma aresta. Em seguida, o outro também escolhe dois vértices unindo-os por outra aresta, mas obedecendo a uma primeira regra muito importante, que é fazê-lo sem que sua aresta cruze a primeira que foi traçada. Lance a lance, cada participante jogando uma vez, continua o mesmo processo... O jogador escolhe dois pontos lado a lado (em linha ou coluna), traça a aresta de um até o outro, nunca cruzando nenhuma aresta (ou seja, o grafo que se vai construindo é planar) e com a regra adicional de não formar triângulo (isto é, o grafo não representa uma estrutura rígida). Perde o jogo aquele que, numa determinada vez de jogar seja obrigado, para traçar sua nova aresta, a formar um ciclo de comprimento (número de arestas) igual a 4, o que também é proibido. Caso chegue a este ponto, ele nem deve traçar tal aresta, declarando-se derrotado... A estratégia de cada jogador, portanto, não se limita a traçar aleatoriamente suas arestas apenas obedecendo às regras (restrições) impostas mas, sim, a traçá-las buscando levar o adversário a formar um ciclo de comprimento 4!!!

Nas figuras 10, 11 e 12, sempre com linhas cheias representando as jogadas do jogador A e tracejadas do jogador B, são vistos três exemplos de seqüências de jogadas indicando, para cada uma delas, quem sai vencedor.

Na figura 10, em que se vê (pelo número de linhas cheias e tracejadas) que o jogador B iniciou o jogo, é a vez de A jogar mas este, não tendo como traar aresta sem formar um ciclo de comprimento 4, perde!!!

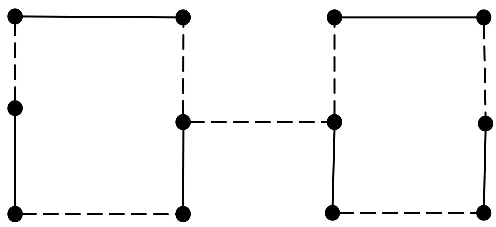


Figura 10

Na figura 11, novamente B inicia o jogo e vence!!!

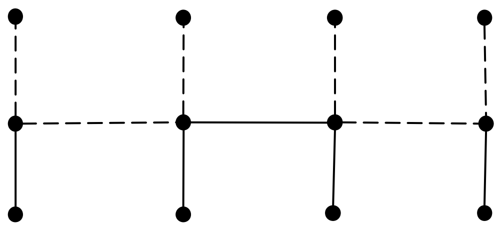


Figura 11

Na figura 12, também B inicia o jogo mas, ao contrário de nas anteriores, é A quem vence, provando não ser este um "jogo de azar", e sim de estratégia, raciocínio!

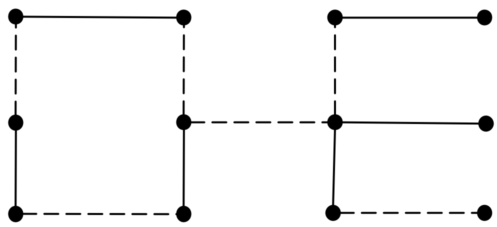


Figura 12

No que defendemos a proposta "Grafos para Educação Básica", note-se o quanto o *Jogo das Arestas* (e outros com fins análogos de possível criação do próprio professor) poderia ser explorado didaticamente junto aos alunos, inclusive com o uso do geoplano ou outros recursos com material concreto, ao trabalhar conceitos em grafos, como os que abordamos ao longo do desenvolvimento até agora deste Exemplo 4 (vértice, aresta, ciclo, grafo planar, estrutura rígida...) e a seguir (árvore e teorema correspondente).

Analisando melhor o *Jogo das Arestas*, concluímos que, no caso de ser par o número de vértices, o participante que iniciar o jogo e for induzindo o grafo em construção a manter-se sempre como uma árvore, certamente vencerá devido ao seguinte resultado bem simples da Teoria dos Grafos: "Toda árvore de n vértices possui $(n-1)$ arestas".

Sobre o *Jogo das Arestas* e nossos dois últimos parágrafos, três perguntas finais:

1. Assim como fizemos análise conclusiva para o caso de o número de vértices ser par, poderíamos fazer alguma análise também produtiva para n ímpar?
2. Que outros conceitos em grafos poderiam ser explorados nesse jogo?
3. Para torná-lo possuidor de maiores nuanças (possibilidades) e – principalmente, talvez – de modo a incluir outros conceitos ou resultados em grafos a serem explorados, poderíamos aperfeiçoar o *Jogo da Arestas*? Como, por exemplo?

Nossos quatro últimos exemplos, apenas enunciados devido às naturais limitações de espaço que se impõem, mas dadas fontes onde se podem encontrar suas resoluções em grafos, objetivam dar uma estimulação a mais para o leitor buscar outras leituras.

<u>Exemplo 5</u> - *O Teorema das 4 Cores*, em qualquer livro clássico sobre grafos, com resolução dentro do tópico "Coloração de vértices": Pode-se colorir qualquer mapa só com 4 cores (ou menos) tal que regiões com fronteira entre si ganhem cores distintas.

<u>Exemplo 6</u> - (BRIA, 1998), bem mais simples, mas usando mesmo tópico anterior: Num congresso cogita-se oferecer 7 minicursos a serem confirmados ou não em função das seguintes condições impostas: (i) A cada dia deve haver sessões de todos os minicursos cada um em horário fixo; (ii) O horário de cada minicurso será 8:00/9:30, 9:30/11:00, 11:00/12:30, 14:30/16:00 ou 16:00/17:30; (iii) Sendo 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 os minicursos, não podem ter mesmo horário: 1 com 3, 4, 6 e 7; 2 com 3, 5 e 7; 3 com 1, 2, 5, 6 e 7; 4 com 1, 5, 6 e 7; 5 com 2, 3, 4 e 7; 6 com 1, 3 e 4; 7 com 1, 2, 3, 4 e 5. Pode-se dar os 7 minicursos, isto é, há horários para eles sob as condições impostas? Se SIM, dê o número mínimo de horários (exemplifique-os) a se usarem, relevante pois em horários que façamos sobrar sem minicurso podem-se alocar palestras, painéis, pôsteres, lanche...

<u>Exemplo 7</u> - (ALDOUS, WILSON, 2000), de resolução bem simples análoga à de nosso *Problema Inicial de Estimulação* (questão euleriana): Dispondo suas pedras como de costume, pode-se “fechar” (não sobrem pedras) o jogo de dominó de modo que o último número da última pedra “encoste-se” no primeiro número da primeira pedra.

Fizemos questão de fechar o artigo com um problema apresentável “para qualquer criança”, visando introduzir-lhe a idéia de grafo orientado, proposto em experimento (estudo de caso da tese do primeiro autor) a alunos da 8ª série de escola municipal de região bem carente em Cantagalo (RJ) e com retorno muito satisfatório.

<u>Exemplo 8</u> - (BRIA, 2001): Do grande poeta brasileiro Carlos Drummond de Andrade são os versos “João amava Teresa, que amava Raimundo, que amava Maria, que amava Joaquim, que amava Lili, que não amava ninguém”. Represente graficamente esta situação, só com bolinhas e linhas, com a inicial do nome de cada pessoa numa bolinha.

REFERÊNCIAS E INDICAÇÕES BIBLIOGRÁFICAS

ALDOUS, J. M., WILSON, R. J. *Graphs and applications: an introductory approach.*. Walton Hall: Springer, 2000.

BIGODE, A. J. L. *Matemática hoje é feita assim*. ão Paulo, FTD, 2000.

BOAVENTURA NETTO, P. O. *Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos.* Edgard Blücher, 2001.

BRIA, J. *Grafos no Ensino Fundamental e Médio: Matemática, Interdisciplinaridade e Realidade.* D.Sc. tese, COPPE/UFRJ. 2001.

BRIA, J., COSENZA, C. A. N., CAMPOS, G. H. B. *Grafos no Ensino Fundamental e Médio: Matemática, Interdisciplinaridade e Realidade*. Boletim GEPEM - Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática, v. 36, p. 11-35. 2000.

BRIA, J. *Grafos, por que não?*. Caderno de Licenciatura em Matemática UFF, v.1, p. 39-48. EDUFF. 1998.

BRIA, J. *Uma introdução à Teoria dos Grafos e suas aplicações*. IV Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC, UERJ/IPRJ. 1996.

CHARTRAND, G. *Introductory graph theory*. Dover Publications, 1977.

CORIAT, M. et alli. *Nudos y Nexos: redes en la escuela*. Coleção “Matemáticas: cultura y aprendizaje”, v. 21, Editorial Sintesis. 1989.

DANTE, L. R. *Tudo é matemática.*. São Paulo, Ática, 2004.

DI PIERRO NETTO, S. . *Matemática: conceito e historias*. São Paulo, Scipione, 1999.

IEZZI, G., DOLCE, O., MACHADO, A. *Matemática e* realidade. São Paulo, Atual, 2000.

IMENES, L. M. P., JAKUBOVIC,J., LELLIS,M. *Matemática*. São Paulo, Scipione, 1999.

MARIANI, A. C. http://www.inf.ufsc.br/grafos/

ORE, O. *Graphs and their uses*. Revisado e atualizado por Robin J. Wilson. Washington: The Mathematical Association of America. 1990.

SPINELLI, W., SOUZA, M. H. S. *Matematica*. São Paulo, Ática, 2001.

Outros:

(i) Artigos em grafos publicados em alguns números da RPM - Revista do Professor de Matemática (SBM), como LA PENHA (3, 1983), PITOMBEIRA (11, 1987), LIMA (12, 1988), CARNEIRO (29, 1995)...

(ii) Livros da Coleção *O prazer da Matemática* (Editora Gradiva, Lisboa) contendo inúmeros jogos e outros "divertimentos" matemáticos, muitos com resoluções com modelagem em grafos.