ESTUDOS DOS DETERMINANTES

Fernanda Lúcia Sá

ESTUDO DOS DETERMINANTES

1. Introdução

A noção de determinante desempenha um papel importante na Matemática, aparecendo em teoremas fundamentais como o Teorema da Função Inversa e o Teorema de Mudança de Variáveis para integrais múltiplas.

O objetivo do nosso trabalho é estudar a teoria de determinantes através de um texto que a apresente de modo rigoroso. Em nossa apresentação, usamos fortemente o conceito de permutações e algumas de suas propriedades. Poderíamos introduzir a noção de determinante através das formas multilineares alternadas. Escolhemos, no entanto, uma abordagem mais elementar, de modo a tornar o texto acessível aos alunos de Álgebra Linear II, disciplina do curso de Matemática da UFF onde o assunto é tratado.

Nosso texto é dividido em três partes. Na primeira, apresentamos uma abordagem histórica. Na segunda, apresentamos o conceito de permutação e algumas das suas propriedades. Na terceira parte, apresentamos o conceito de determinante e provamos vários resultados a ele relacionados. Terminamos nosso trabalho apresentando uma demonstração para o famoso Teorema de Laplace. Este é o resultado central da teoria de determinantes já que, juntamente com as operações elementares sobre as linhas de uma matriz, fornece um método prático para o cálculo de determinantes.

Neste trabalho representamos por **N** o conjunto dos números inteiros não negativos, por **N*** o conjunto dos números inteiros positivos e por **R** o conjunto dos números reais. Se A e B são conjuntos com $A \subset B$, representamos por B-A o complementar de A em B; ou seja, B-A denota o conjunto dos elementos de B que não estão em A.

2. Notas Históricas

O estudo das matrizes e dos determinantes surgiu com o estudo de sistemas lineares. Um dos registros mais antigos dos sistemas de equações lineares são as tabuletas de argila dos babilônios que datam de 300 A. C.. Na China, entre 200 A. C. e 100 A. C., foi publicado o livro *Nove Capítulos sobre a Arte Matemática*. Neste texto, assim como nas tabuletas da Babilônia, aparecem problemas envolvendo sistemas de equações lineares. Vejamos um exemplo:

> "Existem 3 tipos de milho. Três pacotes do primeiro, dois do segundo e um do terceiro somam 39 unidades de milho. Dois pacotes do primeiro, três pacotes do segundo e um do terceiro somam 34 unidades. E um pacote do primeiro, dois do segundo e três do terceiro somam 26 unidades. Sabendo que os pacotes de milho do mesmo tipo contem a mesma quantidade de unidades, quantas unidades de milho contém um pacote de cada tipo?"

Este seria um problema de solução simples atualmente. Mas foi admirável o que autor do livro, que até hoje tem o nome desconhecido, fez para a sua época. Ele colocou em uma tabela os coeficientes do sistema da seguinte forma:

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Depois explicou passo a passo como fazer o processo análogo ao que conhecemos hoje como processo da eliminação de Gauss, chegando à seguinte tabela:

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39

Por fim, encontrou quantas unidades do terceiro tipo de milho existem no pacote. As unidades do primeiro e do segundo tipo são obtidas por substituição.

É conveniente observar que o processo da eliminação que apareceu no livro citado anteriormente só foi usado em 1809, pelo matemático alemão Gauss (1777-1855), em um estudo feito entre 1803 e 1809 sobre a órbita do asteróide Pallas; nele aparece um sistema linear com 6 equações e 6 incógnitas.

A idéia de determinante surgiu simultaneamente na Alemanha e no Japão. Leibnitz (1649- 1716), em uma carta escrita para L'Hospital (1661-1704), sugeriu usar combinações dos coeficientes para resolver sistemas de equações lineares e, além disso, encontrou uma maneira de indexar tais coeficientes com números. No mesmo ano, no Japão, o matemático Seki Kowa (1642-1708) escreveu um livro apresentando sistemas lineares sob a forma matricial, como já tinha aparecido na matemática chinesa. Seki foi o primeiro matemático a calcular determinantes. Em seu livro ele apresentou vários exemplos, mas não mostrou algo que fosse válido em casos gerais.

O matemático escocês Maclaurin (1698-1746) também comparece na história dos determinantes. Em 1730, Maclaurin escreveu um livro chamado *Um tratado sobre Álgebra*, que só foi publicado em 1748, dois anos após a sua morte. Neste livro, Maclaurin apresenta o que chamou de "teorema geral" para eliminação de incógnitas de um sistema linear, faz a demonstração para matrizes de ordem 2 e 3 e explica como fazer a demonstração para matrizes de ordem 4. Maclaurin, porém, não comenta se o resultado pode ser generalizado para matrizes de ordem $n \geq 4$.

O "teorema geral de Maclaurin" é conhecido hoje como regra de Cramer, pois foi o matemático suíço Cramer (1704-1752) quem publicou o resultado para matrizes de ordem n, no apêndice do seu livro *Introdução à Análise de Curvas Algébricas*, de 1750. É interessante observar que a demonstração da regra não constava do livro de Cramer. O valor das incógnitas encontradas pela regra de Cramer eram frações, onde no numerador e no denominador apareciam certas combinações dos coeficientes do sistema linear. Hoje sabemos que essas combinações são determinantes.

O termo "determinante" só foi introduzido em 1801, por Gauss.

Cauchy (1789-1857), matemático francês, fez um dos melhores trabalhos sobre determinantes. Em 1812, provou o teorema do produto de determinantes em seu longo tratado sobre o assunto. Cauchy usou permutações em seu texto e esta será também a abordagem utilizada no decorrer deste trabalho.

Foi na primeira contribuição inglesa à teoria de determinantes, feita por Cayley (1821-1895) em 1841, onde apareceram as duas barras verticais para indicar determinantes. Em alguns momentos neste texto usaremos essa notação.

3. Permutações

Se n ∈ N*. Seja $J_n = \{1, 2, ..., n\}$. Uma *permutação* de J_n é uma aplicação $\sigma: J_n \to J_n$ que é bijetora. Denotamos por S_n o conjunto de todas as permutações de J_n. É fácil verificar que S_n tem n! elementos. Usualmente denotamos um elemento σ de S_n por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Assim, por exemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

representa a permutação σ de J_3 definida por $\sigma(1)= 2$, $\sigma(2)= 3$ e $\sigma(3)= 1$. A permutação σ de J_n tal que $\sigma(j)= j$ para todo $1 \leq j \leq n$ é chamada de *permutação identidade* e denotada por id.

Se σ e τ pertencem ao conjunto S_n, então podemos formar a aplicação composta $\sigma \circ \tau$ que também pertence a S_n. Por simplicidade escreveremos $\sigma\tau$.

Seja $\sigma \in S_n$. A *permutação inversa* de σ, denotada por σ^{-1}, é a aplicação $\sigma^{-1}: J_n \to J_n$ tal que $\sigma^{-1}\sigma = \sigma\sigma^{-1} = \text{id}$.

Seja $n \geq 2$. Uma permutação $\sigma \in S_n$ é chamada de uma *transposição* se existem elementos distintos a_1 e a_2 em J_n tais que $\sigma(a_1)= a_2$, $\sigma(a_2)= a_1$ e $\sigma(j)= j$ para todo $j \in J_n - \{a_1,a_2\}$. Em outras palavras, uma transposição é uma permutação de J_n que troca dois números um pelo outro enquanto os demais permanecem fixos. Por exemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

é uma transposição.

É fácil verificar que a transposição inversa de uma transposição é também uma transposição.

Proposição 1. Toda permutação de J_n, $n \geq 2$, pode ser escrita como uma composição de transposições.

Demonstração. A demonstração será feita por indução sobre n. Para n = 2 temos apenas duas permutações. São elas a permutação identidade e a permutação σ de J_2 tal que $\sigma(1) = 2$ e $\sigma(2) = 1$. Como σ é uma transposição e id=$\sigma\sigma$, temos o resultado para n=2. Consideremos agora $n \geq 3$. Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para n - 1. Seja $\sigma \in S_n$. Suponhamos que $\sigma(n)=k$. Seja τ a transposição tal que $\tau(k)=n$ e $\tau(n)=k$. Temos então que a permutação $\tau\sigma$ é tal que $\tau(\sigma(n))= \tau(k)=n$. Assim $\tau\sigma$ deixa n fixo. Podemos então considerar que $\tau\sigma \in S_{n-1}$. Por hipótese de indução, existem transposições $\tau_1, \tau_2, \tau_3, ..., \tau_s$ de J_n tais que $\tau_j(n)=n$ para todo $1 \leq j \leq s$ e $\tau\sigma = \tau_2\tau_3... \tau_s$. Como τ^{-1} é uma transposição, temos que σ pode ser expressa como uma composição de transposições, como
desejávamos demonstrar.

Seja $\sigma \in S_n$. Denotamos por P^+ o conjunto dos pares (i, j) com $1 \leq i < j \leq n$ tais que $\sigma(i) < \sigma(j)$ e denotamos por P^- o conjunto dos pares (i, j) com $1 \leq i < j \leq n$ tais que $\sigma(i) > \sigma(j)$. Seja m o número de pares pertencentes a P^-. Este número m é chamado de *número de inversões* de σ.
Por exemplo, considere a seguinte permutação de J_5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Temos que o número de inversões da permutação acima é 2. Já a permutação de J_5 dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

tem 3 inversões.

Seja $\sigma \in S_n$. Definimos o *sinal de* σ, e denotamos por $\varepsilon(\sigma)$, o número $(-1)^m$, onde m é o número de inversões de σ.

Por exemplo, os sinais das duas permutações apresentadas anteriormente são 1 e -1, respectivamente.

Proposição 2.
i) Se σ e σ' são permutações de J_n, então $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$.
ii) Se τ é uma transposição, então $\varepsilon(\tau) = -1$.

Demonstração. i) Seja $\sigma \in S_n$. Considere P = {(i, j), $1 \leq i < j \leq n$ }. É fácil verificar que $P^+ \cap P^- = \varnothing$ e que $P = P^+ \cup P^-$; ou seja, que $\{P^+, P^-\}$ é uma partição de P. Definamos a função φ: $(i,j) \in P \to \varphi[(i,j)]$ por

$$\varphi[(i,j)] = \begin{cases} (\sigma(i), \sigma(j)) & \text{se} \quad (i,j) \in P^+ \\ (\sigma(j), \sigma(i)) & \text{se} \quad (i,j) \in P^- \end{cases}$$

Claramente φ é injetiva. Mostraremos que φ é sobrejetiva. Da definição de φ temos que $\varphi(P) \subset P$. Para vermos que $P \subset \varphi(P)$, tome (k, l) $\in$ P com k < l. Como σ é uma bijeção, existem únicos i e j em J_n tais que $\sigma(i)=k$ e $\sigma(j)=l$. Ora, se $1 \leq i < j \leq n$, então $(i, j) \in P^- \subset P$, já que $\sigma(i) = k < \sigma(j) = l$. Assim, existe $(i, j) \in P$ tal que $\varphi[(i, j)] = (k, l)$.

Seja τ uma permutação qualquer de J_n. Consideremos a seguinte expressão:

$$\Delta_\sigma = \prod_{(i,j)\in P} [\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))].$$

Como $\{P^+, P^-\}$ é uma partição de P, temos que:

$$\Delta_\sigma = \prod_{(i,j)\in P^+} [\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))] \prod_{(i,j)\in P^-} [\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))] =$$

$$= (-1)^m \prod_{(i,j)\in P^+} [\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))] \prod_{(i,j)\in P^-} [\tau(\sigma(i)) - \tau(\sigma(j))],$$

onde m é o número de pares em P^{--}.

Sendo a função φ bijetiva, podemos reescrever o produto anterior da seguinte forma:

$$\Delta_\sigma = (-1)^m \prod_{(k,l)\in P} [\tau(l)\text{-}\tau(k)].$$

Como $\varepsilon(\sigma) = (-1)^m$ obtemos:

$$\Delta_\sigma = \epsilon(\sigma) \prod_{(k,l)\in P} [\tau(l)\text{-}\tau(k)]. \tag{1}$$

Seja σ' uma permutação de J_n. Por (1) temos que

$$\prod_{(i,j)\in P} [\mathrm{id}\sigma'(\sigma(j)) - \mathrm{id}\sigma'(\sigma(i))] = \epsilon(\sigma'\sigma) \prod_{(i,j)\in P} [\mathrm{id}(j) - \mathrm{id}(i)] = \epsilon(\sigma'\sigma) \prod_{(i,j)\in P} (\mathrm{j - i}). \tag{2}$$

Por outro lado, por (1) também temos que

$$\prod_{(i,j)\in P} [\mathrm{id}\sigma'(\sigma(j)) - \mathrm{id}\sigma'(\sigma(i))] = \epsilon(\sigma) \prod_{(i,j)\in P} [\mathrm{id}(\sigma'(j)) - \mathrm{id}(\sigma'(i))] = \epsilon(\sigma)\epsilon(\sigma') \prod_{(i,j)\in P} [(\mathrm{id}(j) - \mathrm{id}(i)] =$$
$$\epsilon(\sigma)\epsilon(\sigma') \prod_{(i,j)\in P} (\mathrm{j - i}). \tag{3}$$

De (2) e (3) obtemos que $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$, provando assim i).

Para provar ii), tome τ uma transposição. Como existe apenas um par (α, β) com $1 \le \alpha < \beta \le n$ tal que $\tau(\alpha) = \beta$ e $\tau(\beta) = \alpha$, temos que todos os pares que estão em P^{--} são da forma:

Assim P^{--} tem $2\beta - 2\alpha - 1$ pares, o que nos mostra que m é ímpar e então, $\varepsilon(\sigma)$ =

$= (-1)^m = -1$, como queríamos demonstrar.

Corolário 3. Se escrevermos uma permutação $\sigma \in S_n$ como um produto de transposições,
$\sigma = \tau_1\tau_2...\tau_r$, então r é par se $\varepsilon(\sigma) = 1$ e r é ímpar se $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Demonstração. Pela Proposição 2 temos que $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\tau_1\tau_2...\tau_r) = \varepsilon(\tau_1)\,\varepsilon(\tau_2)...\,\varepsilon(\tau_r) = (-1)^r$. Portanto, se $\varepsilon(\sigma) = 1$ temos que r é par e se $\varepsilon(\sigma) = -1$ temos que r é ímpar, como desejávamos demonstrar.

Corolário 4. Se $\sigma \in S_n$, então $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$.

Demonstração. Temos que $1 = \varepsilon(\mathrm{id}) = \varepsilon(\sigma^{-1}\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})\varepsilon(\sigma)$, pela proposição 2 i).

Daí $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma) = 1$ ou $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma) = -1$, provando assim o corolário 4.

4. Determinantes

Seja A=(a_{ij}) uma matriz quadrada de ordem n. O *determinante* da matriz A, denotado por
det A, é o número real dado por

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}.$$

Vejamos como calcular o determinante de uma matriz A de ordem n, com n ≤ 3.

Para n = 1 temos a matriz $A = [a_{11}]$. Existe somente a permutação identidade em S_1. Portanto teremos det A = $\varepsilon(\text{id}) a_{1id(1)} = a_{11}$.
Em S_2 existem 2 permutações, a permutação identidade e σ como abaixo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Daí, o determinante de uma matriz A de ordem 2, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$,é calculado da seguinte maneira:

Já para calcular o determinante de uma matriz A de ordem 3, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$,

teremos um pouco mais de trabalho, um vez que $\boldsymbol{S_3}$ possui 6 permutações. São elas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

que denotamos por id, σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 e σ_5 respectivamente. Note que id, σ_3 e σ_4 possuem um número par de inversões, enquanto que σ_1, σ_2 e σ_5 possuem um número ímpar de inversões.

Logo calculamos o determinante de A da seguinte forma:

$$\det A = \epsilon(\text{id}) a_{1id(1)} a_{2id(2)} a_{3id(3)} + \epsilon(\sigma_1) a_{1\sigma_1(1)} a_{2\sigma_1(2)} a_{3\sigma_1(3)} + \epsilon(\sigma_2) a_{1\sigma_2(1)} a_{2\sigma_2(2)} a_{3\sigma_2(3)} + \epsilon(\sigma_3) a_{1\sigma_3(1)} a_{2\sigma_3(2)} a_{3\sigma_3(3)} + \epsilon(\sigma_4) a_{1\sigma_4(1)} a_{2\sigma_4(2)} a_{3\sigma_4(3)} + \epsilon(\sigma_5) a_{1\sigma_5(1)} a_{2\sigma_5(2)} a_{3\sigma_5(3)}$$

ou seja,

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}).$$

Calcular o determinante de uma matriz de ordem n ≥ 4 diretamente pela definição se torna muito trabalhoso, porque aparecerá um somatório com n! parcelas. Assim, veremos a seguir, várias propriedades que facilitarão o cálculo do determinante de uma matriz.

Proposição 5. Se I é a matriz identidade de ordem n, então det I = 1.

Demonstração. Sabemos que as entradas de I = (a_{ij}) são a_{ij} = 0, se i≠j e a_{ij} = 1 se i = j. Assim $\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)}$ será diferente de zero se e somente se σ é a permutação identidade. Portanto temos que det I = ε (id)$a_{11}a_{22}$ ...a_{nn} = 1, provando o que desejávamos.

Proposição 6. O determinante de uma matriz A=(a_{ij}) é sempre igual ao determinante de sua
matriz transposta A^t = (b_{ij}).

Demonstração. Para provar que det A = det A^t, observemos que, fixada $\sigma \in \boldsymbol{S_n}$, para cada j $\in \boldsymbol{J_n}$,existe um único i $\in \boldsymbol{J_n}$ tal que j=σ(i), donde i=σ^{-1}(j). Logo $b_{1\sigma(1)}b_{2\sigma(2)}...b_{n\sigma(n)}$ =
$b_{\sigma^{-1}(1)1}\, b_{\sigma^{-1}(2)2}...\, b_{\sigma^{-1}(n)n}$, já que a multiplicação em R é comutativa. Portanto, pelo Corolário 4, segue que

$$\det A^t = \sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)b_{1\sigma(1)}b_{2\sigma(2)}...b_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)b_{\sigma^{-1}(1)1}b_{\sigma^{-1}(2)2}...b_{\sigma^{-1}(n)n} =$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)a_{1\sigma^{-1}(1)}a_{2\sigma^{-1}(2)}...a_{n\sigma^{-1}(n)} = \sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma^{-1})a_{1\sigma^{-1}(1)}a_{2\sigma^{-1}(2)}...a_{n\sigma^{-1}(n)} =$$

$$= \sum_{\psi\in S_n}\epsilon(\psi)a_{1\psi(1)}a_{2\psi(2)}...a_{n\psi(n)} = \det A,$$

como desejávamos mostrar.

Pela Proposição 6, segue que os três resultados a seguir são também válidos se nós considerarmos as linhas de uma matriz.

Em alguns momentos será conveniente pensar no determinante de uma matriz A como uma função dos vetores-coluna de A. Se $x_1,x_2,..., x_n$ são as colunas de A, escrevemos det A = det($x_1,x_2,..., x_n$), desta forma podemos ver o determinante como uma função de $\mathbf{R}^n$ em **R**.

Teorema 7. O determinante de uma matriz é uma função linear de cada um dos seus vetores-coluna quando os outros estão fixos.

Demonstração. Sejam A = (a_{ij}) e B = (b_{ij}) duas matrizes quadradas de ordem n. Sejam λ e
k números reais. Seja C = (c_{ij}) onde $c_{i1} = \lambda\, a_{i1}$ + k b_{i1} para todo i, 1 ≤ i ≤ n e $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todos i,j com 1 ≤ i ≤ n e 2 ≤ j ≤ n. Provaremos que det C = λ det A + k det B. Por definição
temos que

$$\det C = \sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)c_{1\sigma(1)}c_{2\sigma(2)}\cdots c_{n\sigma(n)}.$$

Para cada $1 \leq i \leq n$, defina $S^i_n = \{\sigma \in S_n : \sigma(i) = 1\}$.Claramente a família dos conjuntos $(S^i_n)_{1 \leq i \leq n}$ é uma partição de S_n. Fixe $1 \leq i \leq n$. Note que para cada $\sigma \in S^i_n$,

$$\epsilon(\sigma)c_{1\sigma(1)}c_{2\sigma(2)}\ldots c_{i\sigma(i)}\ldots c_{n\sigma(n)}=$$
$$\epsilon(\sigma)c_{1\sigma(1)}c_{2\sigma(2)}\ldots\lambda a_{i\sigma(i)}\ldots c_{n\sigma(n)} + \epsilon(\sigma)c_{1\sigma(1)}c_{2\sigma(2)}\ldots \mathrm{k} b_{i\sigma(i)}\ldots c_{n\sigma(n)}=$$
$$\lambda\epsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{i\sigma(i)}\ldots a_{n\sigma(n)} + \mathrm{k}\epsilon(\sigma)b_{1\sigma(1)}b_{2\sigma(2)}\ldots b_{i\sigma(i)}\ldots b_{n\sigma(n)},$$

pela definição da matriz C. Logo:

$$\det \mathrm{C} = \sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)c_{1\sigma(1)}c_{2\sigma(2)}\ldots c_{n\sigma(n)}= \sum_{i=1}^{n}(\sum_{\sigma\in S_n^i} c_{1\sigma(1)}c_{2\sigma(2)}\ldots c_{n\sigma(n)})=$$
$$\sum_{i=1}^{n}[\lambda\sum_{\sigma\in S_n^i} a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)})] + \sum_{i=1}^{n}[\mathrm{k}\sum_{\sigma\in S_n^i} b_{1\sigma(1)}b_{2\sigma(2)}\ldots b_{n\sigma(n)})]=$$
$$\lambda(\sum_{\sigma\in S_n} a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)}) + \mathrm{k}(\sum_{\sigma\in S_n} b_{1\sigma(1)}b_{2\sigma(2)}\ldots b_{n\sigma(n)})=$$
$$\lambda \det \mathrm{A} + \mathrm{k} \det \mathrm{B}.$$

A demonstração acima mostra a linearidade da função determinante em relação à primeira coluna. Como a linearidade em relação às demais colunas é tratada de modo análogo, sua demonstração fica a cargo do leitor.

Teorema 8. Se a matriz B= (b_{ij}) é obtida da matriz A=(a_{ij}) pela troca de duas colunas, então det B = - det A.

Demonstração. Seja τ a transposição que troca entre si os dois números correspondentes as duas colunas de A que são trocadas entre si. Assim $b_{ij} = a_{i\tau(j)}$ para todo $1 \leq i, j \leq n$. Portanto, para qualquer permutação $\sigma \in S_n$,

$$b_{1\sigma(1)}b_{2\sigma(2)}\ldots b_{n\sigma(n)} = a_{1\tau(\sigma(1))}a_{2\tau(\sigma(2))}\ldots a_{n\tau(\sigma(n))}$$

Assim,

$$\det \mathrm{B} = \sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)b_{1\sigma(1)}b_{2\sigma(2)}\ldots b_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)a_{1\tau(\sigma(1))}a_{2\tau(\sigma(2))}\ldots a_{n\tau(\sigma(n))}.$$

Pela Proposição 2, $\varepsilon(\tau\sigma) = \varepsilon(\tau) = \varepsilon(\sigma) = -\varepsilon(\sigma)$; ou seja, $\varepsilon(\sigma) = -\varepsilon(\tau\sigma)$. Portanto:

$$\det \mathrm{B} = - \sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\tau\sigma)a_{1\tau(\sigma(1))}a_{2\tau(\sigma(2))}\ldots a_{n\tau(\sigma(n))}.$$

Mas como σ percorre todos os elementos de Sn, $\tau\sigma$ também percorre todos os elementos de S_n. Logo, det B = - det A.

Corolário 9. Se A=(aij) possui duas colunas iguais então det A = 0.

Demonstração. Seja B=(b_{ij}) a matriz obtida de A trocando de posição as duas colunas iguais e mantendo as demais fixas. Pelo Teorema 8 temos que det B = - det A. Mas A = B. Assim, det A = - det A. Logo det A = 0, como desejávamos mostrar.

Teorema 10. Se A=(a_{ij}) e B=(b_{ij}) são matrizes quadradas de ordem n, então det BA = det B det A.

Demonstração. Sejam $x_1,x_2,..., x_n$ as colunas de A. Defina $\Delta_B(x_1,x_2,..., x_n) = \Delta_B A$ = det BA. As colunas da matriz BA são os vetores $Bx_1, Bx_2,..., Bx_n$. Assim $\Delta_B (x_1,x_2,..., x_n)$ = det($Bx_1, Bx_2,...,Bx_n$). Pelo Teorema 7 temos que

$$\Delta_B A = \Delta_B(\sum_{i=1}^{n} a_{i_1} e_i,\ x_2,...,x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{i_1}\Delta_B(e_i,\ x_2,...,x_n).$$

Repetindo este processo com $x_2,..., x_n$, temos que

$$\Delta_B A = \sum a_{i_1 1} a_{i_2 2} ... a_{i_n n}\Delta_B(e_{i_1},\ e_{i_2},...,e_{i_n}), \qquad (4)$$

sendo a soma relativa a todas as n-uplas ordenadas ($i_1, i_2,...,i_n$) em que $1 \le ir \le$ n.

Pelo Teorema 8 e o Corolário 9 segue que

$$\Delta_B(e_{i_1}, e_{i_2},...,e_{i_n}) = \mathrm{t}(i_1,\ i_2,...,i_n)\Delta_B(e_1,\ e_2,...,\ e_n),\ \text{onde } \mathrm{t}(i_1,\ i_2,...,i_n) = 1,\ 0 \text{ ou } -1. \qquad (5)$$

Como BI = B temos também que

$$\Delta_B(e_1,\ e_2,...,\ e_n) = \det \mathrm{B}. \qquad (6)$$

Portanto, substituindo (5) e (6) em (4), obtemos

$$\det \mathrm{BA} = \Delta_B A = \{\sum a_{i_1 1} a_{i_2 2} ... a_{i_n n}\mathrm{t}(i_1,\ i_2,...,i_n)\}\det \mathrm{B}, \qquad (7)$$

fazendo B = I em (7) obtemos, pela Proposição 5, que

$$\det \mathrm{A} = \det \mathrm{IA} = \{\sum a_{i_1 1} a_{i_2 2} ... a_{i_n n}\mathrm{t}(i_1,\ i_2,...,i_n)\} \qquad (8)$$

Finalmente, substituindo (8) em (7) concluímos que det BA = det B det A.

Corolário 11. Seja A uma matriz de ordem n. Se A é invertível então det A $\neq 0$, além disso,
se B = A^{-1} é a sua inversa então det B = $^1/_{detA}$.

Demonstração. Sabemos que A.B = I. Assim pelo Teorema 10 temos que 1 = det I = det AB = det A . det B. Logo det A $\neq$ 0 e det B = $^1/_{detA}$, como desejávamos mostrar.

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e seja T um operador linear em V. Pelo teorema da dimensão, T é um operador linear bijetivo se, e somente se, o núcleo de T se reduz ao vetor nulo de V. Uma outra caracterização de um operador linear invertível pode ser dada por meio da noção de determinante como mostra o teorema seguinte.

Teorema 12. Seja T um operador linear em V e seja $\alpha = \{ v_1, v_2,...,v_n\}$ uma base de V. Temos que T é invertível se, e somente se, det $[T]^{\alpha}_{\alpha} \neq 0$, onde $[T]^{\alpha}_{\alpha}$ denota a matriz que representa T na base α.

Demonstrativo. Suponhamos que T é invertível. Então, $I = [T \circ T^{-1}]^{\alpha}_{\alpha} = [T]^{\alpha}_{\alpha}[T^{-1}]^{\alpha}_{\alpha}$, onde T^{-1} denota o operador inverso de T. Pela Proposição 5 e pelo Teorema 10, segue que

$$1 = \det \mathrm{I} = \det([T]^{\alpha}_{\alpha})\det([T^{-1}]^{\alpha}_{\alpha}).$$

Isso mostra que det $([T]^{\alpha}_{\alpha}) \neq 0$.

Para mostrar a recíproca, suponhamos que T não é invertível. Pelo teorema da dimensão segue, então, que T não é sobrejetivo e, consequentemente, $\{T(v_1), T(v_2),..., T(v_n)\}$ é linearmente dependente. Assim, existe k, $1 \leq k \leq n$ tal que $T(v_k) + \sum c_j T(v_j)=0$, onde os c_j's são números reais.

Para cada i, $1 \leq i \leq n$, chame $x_i = [T(v_i)]_{\alpha}$.

Pela definição da matriz $[T]^{\alpha}_{\alpha}$ temos que det $[T]^{\alpha}_{\alpha}$ = det $(x_1, x_2,..., x_n)$. Agora pelo Teorema 7 e pelo Corolário 9, segue que

$$\begin{gathered}\det\,[T]^{\alpha}_{\alpha} = \\ \det\,(x_1,...\ ,x_k + c_1x_1,..., x_n) = \\ \det\,(x_1,...\ ,x_k + c_1x_1 + c_2x_2,..., x_n) = \\ \vdots \\ \det\,(x_1,...\ ,x_k + \sum_{j\neq k} c_jx_j,..., x_n).\end{gathered}$$

Como $x_k + \sum c_j x_j = 0$, segue que det $[T]^{\alpha}_{\alpha} = 0$. Isto prova o desejado.

5. O Teorema de Laplace

Como já foi dito anteriormente, o cálculo de determinantes de ordem $n \geq 4$ pela definição é muito trabalhoso. E nem sempre as proposições e os teoremas apresentados na parte anterior ajudam a amenizar este problema. É por este motivo que vamos tratar agora do teorema de Laplace, um método muito mais prático de calcular determinantes.

Seja $A=(a_{ij})$ uma matriz de ordem n onde n ¸ 2. Definimos o *menor complementar* do elemento a_{ij} como sendo o determinante da matriz obtida de A suprimindo-se a sua linha i e a sua coluna j. Para este determinante usamos a notação D_{ij} . Definimos o número $(-1)^{i+j}D_{ij}$ como *cofator* de a_{ij} e o denotamos por A_{ij} .

A seguir apresentamos o resultado central do nosso trabalho:

Teorema 13. (Teorema de Laplace) O determinante de uma matriz A=(a_{ij}) de ordem n ≥ 2, é a soma dos produtos, efetuados termo a termo, dos elementos de uma fila qualquer pelos seus respectivos cofatores. Mais precisamente, para cada i, 1 ≤ i ≤ n fixado temos que

$$\det \mathrm{A} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}, \tag{9}$$

e para cada j, 1 ≤ j ≤ n fixado temos que

$$\det \mathrm{A} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}. \tag{10}$$

A expressão em (9) é dita ser o *desenvolvimento de Laplace da matriz A pela sua i-ésima linha* e a expressão em (10) é dita ser o *desenvolvimento de Laplace da matriz A pela sua j-ésima coluna*.

Demonstração. Primeiramente faremos as demonstrações para as colunas da matriz A = (a_{ij}). A demonstração desse teorema será feita por indução sobre n. Vimos no início da

seção 4 que o determinante de uma matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ é dado por $a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$. Mas esse resultado coincide com o desenvolvimento feito pela primeira e pela segunda coluna. De fato, desenvolvendo pela primeira coluna temos $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} = a_{11}(^{-1})^{1+1}D_{11} + a_{21}$(¡1)$^{2+1}D_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ e desenvolvendo pela segunda coluna temos $a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} = a_{12}$(¡1)$_{1+2}D_{12} + a_{22}$(¡1)$_{2+2}D_{22} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Portanto o teorema é verdadeiro para n = 2.

Suponhamos agora que o teorema é verdadeiro para n-1. Mostraremos que também é verdadeiro para n.

Antes de prosseguirmos, convém fazermos algumas observações. Os menores complementares das entradas de A são determinantes de matrizes de ordem n-1. Denotaremos por D^{jl}_{ik} o determinante da matriz que se obtém suprimindo de A as linhas i e j e as colunas k e l.

Fixemos a k-ésima coluna de A, 1 < k ≤ n, e calculemos o número

$$C = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk}.$$

Pela definição de cofator temos que

$$C = a_{1k}(-1)^{1+k}D_{1k} + a_{2k}(-1)^{2+k}D_{2k} + \ldots + a_{nk}(-1)^{n+k}D_{nk}.$$

Mas, como já foi observado anteriormente, D_{1k}, D_{2k}, ...,D_{nk} são determinantes de matrizes de ordem n-1. Portanto, por hipótese de indução podemos calcular esses determinantes pelo Teorema de Laplace. Escolhamos, sem perda de generalidade, fazer o desenvolvimento pela primeira coluna da matriz gerada. Assim

$$D_{1k} = a_{21}(-1)^{2+1}D_{1k}^{21} + a_{31}(-1)^{3+1}D_{1k}^{31} + ... + a_{n1}(-1)^{n+1}D_{1k}^{n1} = \sum_{i=2}^{n} a_{i1}(-1)^{i+1}D_{1k}^{i1}$$

$$D_{2k} = a_{11}(-1)^{1+1}D_{2k}^{11} + a_{31}(-1)^{2+1}D_{2k}^{31} + ... + a_{n1}(-1)^{n}D_{2k}^{n1} = a_{11}D_{2k}^{11} + \sum_{i=3}^{n} a_{i1}(-1)^{i}D_{2k}^{i1}$$

Prosseguindo analogamente temos que

$$D_{nk} = a_{11}D_{nk}^{11} - a_{21}D_{nk}^{21} + ... \pm a_{n-11}D_{nk}^{n-11} = \sum_{i=1}^{n-1} a_{i1}(-1)^{i+1}D_{nk}^{i1}.$$

A substituição de D_{1k}, D_{2k}, ..., D_{nk} na expressão de C acarreta em

$$\mathrm{C} = a_{1k}(-1)^{1+k}\{\sum_{i=2}^{n} a_{i1}(-1)^{i+1}D_{1k}^{i1}\} + a_{2k}(-1)^{2+k}\{a_{11}D_{2k}^{11} + \sum_{i=3}^{n} a_{i1}(-1)^{i}D_{2k}^{i1}\} + ... +$$
$$a_{nk}(-1)^{n+k}\{\sum_{i=1}^{n-1} a_{i1}(-1)^{i+1}D_{nk}^{i1}\}.$$

Se tormarmos em C todas as parcelas onde a_{11} aparece teremos

$$a_{11}\{a_{2k}(-1)^{2+k}D_{2k}^{11} + a_{3k}(-1)^{3+k}D_{3k}^{11} + ... + a_{nk}(-1)^{n+k}D_{nk}^{11}\} =$$
$$a_{11}\{a_{2k}(-1)^{k}D_{2k}^{11} + a_{3k}(-1)^{k+1}D_{3k}^{11} + ... + a_{nk}(-1)^{n+k-2}D_{nk}^{11}\} =$$
$$a_{11}D_{11}.$$

Façamos os mesmo com as parcelas onde a_{21} aparece.

$$a_{21}\{a_{1k}(-1)^{1+k}D_{1k}^{21} - a_{3k}(-1)^{3+k}D_{3k}^{21} - ... - a_{nk}(-1)^{n+k}D_{nk}^{21}\} =$$
$$a_{21}\{a_{1k}(-1)^{k}D_{1k}^{21} - a_{3k}(-1)^{k+1}D_{3k}^{21} - ... - a_{nk}(-1)^{n+k-2}D_{nk}^{21}\} =$$
$$- a_{21}D_{21}.$$

Raciocinando indutivamente, temos que se tomarmos somente as parcelas onde a_{n1} aparece teremos:

$$\pm a_{n1}\{a_{1k}(-1)^{n+k+1}D_{1k}^{n1} + a_{2k}(-1)^{2+k+n}D_{2k}^{n1} + ... + a_{n-1k}(-1)^{2n+k-1}D_{n-1k}^{n1}\} =$$
$$\pm\{a_{1k}(-1)^{k+1}D_{1k}^{n1} + a_{2k}(-1)^{2+k}D_{2k}^{n1} + ... + a_{n-1k}(-1)^{n+k-1}D_{n-1k}^{n1}\} =$$
$$\pm a_{n1}D_{n1}.$$

Daí concluímos que

C = $a_{11}D_{11}$ - $a_{21}D_{21}$ + ... $\pm a_{n1}D_{n1}$.
C = $a_{11}A_{11}$ + $a_{21}A_{21}$ + ... + $a_{n1}A_{n1}$.

Vejamos que det A = $a_{11}A_{11}$ + $a_{21}A_{21}$ + ... + $a_{n1}A_{n1}$; ou seja, vamos começar provando o desenvolvimento de Laplace da matriz A pela sua primeira coluna. Como já vimos anteriormente $(S^i_n)_{1\leq i\leq n}$ é uma partição de $\boldsymbol{S_n}$. Assim:

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)}=$$
$$a_{11}\sum_{\sigma\in S_n^1}\epsilon(\sigma)a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)} + a_{21}\sum_{\sigma\in S_n^2}\epsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{3\sigma(3)}...a_{n\sigma(n)} + ... + a_{n1}\sum_{\sigma\in S_n^n}\epsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{3\sigma(3)}...a_{n-1\sigma(n-1)}=$$
$$a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + ... + a_{n1}A_{n1}.$$

Pela arbitrariedade da escolha de k concluímos que o teorema é verdadeiro para todas colunas da matriz A. Mostraremos agora que o teorema também é válido para as linhas. Fixemos a k-ésima linha de A, $1 < i \leq n$. Seja $A^t=(b_{ij})$. Note que a k-ésima linha de A é exatamente a k-ésima coluna de A^t. Usaremos a notação D^t_{ij} para indicar o menor complementar do elemento b_{ij} e A^t_{ij} para indicar o cofator de b_{ij} . Pelo Teorema de Laplace, podemos calcular o determinante de A_t fazendo o desenvolvimento pela k-ésima coluna. Assim,

$$\det A^t =$$
$$b_{1k}A^t_{1k} + b_{2k}A^t_{2k} + ... + b_{nk}A^t_{nk} =$$
$$b_{1k}(-1)^{1+k}D^t_{1k} + b_{2k}(-1)^{2+k}D^t_{2k} + ... + b_{nk}(-1)^{n+k}D^t_{nk}=$$

Pela definição de A^t e pela proposição 6 temos que

$$b_{1k}(-1)^{1+k}D^t_{1k} + b_{2k}(-1)^{2+k}D^t_{2k} + ... + b_{nk}(-1)^{n+k}D^t_{nk}=$$
$$a_{k1}(-1)^{1+k}D_{k1} + a_{k2}(-1)^{2+k}D_{k2} + ... + a_{kn}(-1)^{n+k}D_{kn}=$$
$$a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + ... + a_{kn}A_{kn}=$$
$$\det A.$$

Devido a escolha arbitraria que fizemos para k, mostramos o resultado que desejávamos.

Pelos resultados obtidos em nosso trabalho, podemos relacionar o determinante de uma matriz com as operações elementares por linha desta matriz.

Lembremos que as opera»coes elementares são três:

(1) Permuta de duas linhas;
(2) Multiplicação de uma linha por um número real não nulo;
(3) Substituição de uma linha por ela mais o múltiplo de uma outra.

Mais precisamente, seja A uma matriz quadrada.

(1) Seja B uma matriz obtida de A pela permuta de 2 linhas. Segue do Teorema 8 que det B
= - det A;
(2) Seja B uma matriz obtida de A pela multiplicação da i- ésima linha por um número real não nulo λ. Segue do Teorema 7 que det B = λ det A;
(3) Seja B uma matriz obtida de A pela substituição da i-ésima linha pela i- ésima linha mais λ vezes a j- ésima linha. Pelo Teorema 7 e Corolário 9 segue que det B = det A.

Para ilustrar essas relações vamos calcular o determinante da matriz A como abaixo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 3 & -3 \\ 6 & 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

Substituindo a segunda linha pela sua soma com -2 vezes a primeira, a terceira linha por sua soma com -3 vezes a primeira linha e a quarta linha por sua soma com -3 vezes a primeira linha obtemos a matriz cujo determinante é dado abaixo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Já observamos anteriormente que esses determinantes serão iguais. Calculemos então esse último determinante fazendo o desenvolvimento pela segunda linha, pois possui um número maior de zeros, diminuindo ainda mais o nosso trabalho.

$$\det A = 0.A_{21} + 0.A_{22} + 0.A_{23} + 5.A_{24} = 5.\ (-1)^{2+4}\ D_{24}$$

Precisamos então calcular agora D_{24}:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

Ora, mas esse determinante é igual ao determinante da matriz que se obtém substituindo-se a terceira linha por sua soma com -2 vezes a segunda linha, qual seja,

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Portanto, $D_{24} = 0$ e det A = 5.1.0 = 0.

Referência Bibliográfica

Boldrini, J.L. e outros; Álgebra Linear; 3ªedição; Editora Harbra Ltda, São Paulo, 1986.

Lang, Serge; Álgebra Linear; E. Blucher, São Paulo, SP, 1971.

Muir, Thomas; The Theory of Determinants; Dover Publications, INC, New York, 1960.

O'Connor, J.J and Robertson,E.F; Matrices and Determinants; Artigo retirado do site http://www.history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/ Matrices_and_eterminants.html, 1996.

Rudin, Walter; Principles of mathematical analysis; McGraw-Hill, Nova Zel^andia , 1976.