SOBRE AS ESTRANHAS PROPRIEDADES DO CONJUNTO CANTOR

Rômulo Rios Rosa

SOBRE AS ESTRANHAS PROPRIEDADES DO CONJUNTO DE CANTOR

Resumo: Neste trabalho define-se o conjunto de Cantor (K) dos terços médios com a clássica construção de retirada de terços médios abertos iniciada no intervalo fechado [0,1]; demonstram-se suas propriedades topológicas elementares; demonstra-se (nas referências apenas menciona-se) a equivalência com o conjunto dos números que possuem representação em base 3 apenas com dígitos 0 e 2. O fato de que ¼ $\in K$ é mostrado usando um método diferente do que comumente é visto na literatura. Comenta-se exemplos não - óbvios de elementos que estão no conjunto, e a pesquisa atual a respeito do assunto. Por último é apresentada uma aplicação à biologia.

1 Preliminares

Visando clareza, listarei os fatos (básicos de análise na reta) que usarei na demonstração das surpreendentes propriedades do nosso objeto de estudo: **o conjunto de Cantor dos terços médios.**

Definição: Um conjunto é dito enumerável quando é infinito e todos os seus elementos podem ser relacionados um a um com números naturais distintos; as relações (funções) assim construídas são chamadas bijeções.

Teorema: Qualquer subconjunto de um conjunto enumerável é finito ou enumerável.

Teorema: **Q** é enumerável.

Teorema (Dedekind): Existe um conjunto R que goza das propriedades de corpo ordenado e do "axioma do supremo"; **R** é dito **corpo ordenado completo**.

Teorema (Axioma do supremo): Todo subconjunto de **R** limitado superiormente possui supremo.

Definição: Uma **sequência** É uma lista ordenada de números reais; os elementos da sequência são indexados por números naturais.

Definição: Se dado um número real positivo qualquer ε, existir um índice da sequência (x_n) a partir do qual, a distância entre quaisquer 2 termos da (x_n) É menor que ε, (x_n) é dita uma **sequência de Cauchy**

Definição (limite de uma sequência): sejam L um número real e (x_n) uma sequência. Se para cada vizinhança de L existir um Índice da sequência (x_n) a partir do qual, todos os termos da (x_n) estão contidos na vizinhança dada , o número L É chamado de limite da sequência . Dizemos que (x_n) converge para L, $x_n \to L$

Teorema: Para que uma sequência (x_n) em R seja convergente é condição necessária e suficiente que (x_n) seja uma sequência de Cauchy

Observação: este fato é uma forma equivalente de dizer que R **é um corpo ordenado completo**; Cantor utilizou-se deste fato para (assim como fez Dedekind) também exibir uma construção de **R**.

Teorema: $|a| < 1 \Rightarrow a^n \to 0$

Teorema (aritmética de limites): Sejam (x_n) e (y_n) sequências em R, com $x_n \to L$ e
$y_n \to M$; então é verdade que $x_n + y_n \to L + M$ e também $x_n . y_n \to L.M$

Definição: Seja (a_n) uma sequência de números reais. A partir dela formamos uma nova sequência (s_n) cujos elementos são as somas

$s_1 = a_1;\ s_2 = a_1 + a_2;\ s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n;$

que chamaremos as reduzidas da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Se existir S tal que $s_n \to S$ dizemos que $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Teorema:

$$a \neq 0,\ |a| < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(a^n) = \frac{1}{1-a}$$

Definição: Um subconjunto A de R É dito aberto se qualquer um de seus pontos pertence a um intervalo aberto contido no conjunto.

Definição: Um conjunto F É dito fechado se dada qualquer sequência em F, o limite dela (quando existe) é também um elemento de F.

Definição: p é dito ponto de acumulação de um conjunto B quando existe sequência em B, convergindo para p, sendo todos os termos da sequência diferentes de p.

Teorema: A união qualquer de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

Teorema: Para que um conjunto seja fechado É condição necessária e suficiente que o seu complementar seja aberto.

Definição: Sejam A e B subconjuntos de R. **A** é dito **denso em B** se para qualquer elemento $b \in$ B, existe sequência (a_n) de elementos de A tal que $a_n \to b$.

2 Miríade

2.1 Definição do conjunto de Cantor(K)

Seja F_0 o intervalo [0,1].

Retiremos dele o seu terço médio aberto, o intervalo aberto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

Chamemos de F_1 a união dos intervalos restantes: $F_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$

Retiremos de F_1 o terão médio de cada um de seus intervalos; ou seja, vamos retirar os intervalos abertos $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}), (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$

Chamemos de F_2 a união dos intervalos restantes: $F_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$

Retiremos de F_2 o terão médio de cada um de seus intervalos; ou seja, vamos retirar os intervalos abertos $(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}), (\frac{7}{27}, \frac{8}{27}), (\frac{19}{27}, \frac{20}{27}), (\frac{25}{27}, \frac{26}{27})$

Chamemos de F_3 a união dos intervalos restantes:

$$F_3 = [0, \frac{1}{27}] \cup [\frac{2}{27}, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{7}{27}] \cup [\frac{8}{27}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{19}{27}] \cup [\frac{20}{27}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, \frac{25}{27}] \cup [\frac{26}{27}, 1].$$

Continuando desta forma, obtemos uma sequência de conjuntos F_n, onde:

$$(i) F_1 \supset F_2 \supset F_3 \ldots \ ; o\ que\ significa\ que\ \ F_k = \bigcap_{n=1}^{k} F_n$$

(ii)F_n é a união de 2^n intervalos, cada um de comprimento $\frac{1}{3^n}$.

O conjunto

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

é chamado o conjunto de Cantor.

Figura 1: 6 primeiras etapas da construção do conjunto de Cantor dos terços médios

2.2 K é fechado

[0,1] é um intervalo fechado; logo seu complementar (em **R**) é aberto. Na construção de K tudo o que retiramos são intervalos abertos; concluímos daí que o complementar de K é uma reunião de conjuntos abertos; como a união qualquer de abertos é um aberto, o complementar de K (em **R**) é aberto. Conclusão: K é um conjunto fechado.

2.3 K é totalmente desconexo (não contém intervalos)

Dado um intervalo (a,b) seu comprimento é dado por b — a ; um único ponto não tem comprimento (ou tem comprimento zero) ; o [0; 1] tem comprimento 1.
Na primeira etapa (F_1) da construção de K retiramos um intervalo de comprimento $\frac{1}{3}$
Na segunda etapa (F_2) da construção de K retiramos 2 intervalos de comprimento $\frac{1}{3^2}$
Na terceira etapa (F_3), 4 intervalos de comprimento $\frac{1}{3^3}$

Somando o comprimento do que é retirado de K em todas as etapas:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots$$

Esta é a série geométrica onde $a_1 = \frac{1}{3}$ e $q = \frac{2}{3}$ donde a soma é:

$$\frac{1/3}{1-2/3} = \frac{1/3}{1/3} = 1.$$

O cálculo acima mostra que do conjunto inicial [0,1], retiramos um subconjunto de comprimento 1. Assim o conjunto remanescente (K) tem comprimento 1-1=0.
Daí segue que K não contém intervalos, pois um intervalo, por menor que seja, tem comprimento positivo, maior que zero.

2.4 Não sobra nada?

Na construção de K, em cada etapa F_n restam 2^n intervalos.

Note que cada extremo de intervalo restante em Fn pertence a todos os F_k subsequentes; logo pertencem à intersecção. Portanto, K não é vazio.

Mais que isso: para cada etapa n existem 2^{n+1} extremos; como s„o infinitas as etapas, o conjunto dos extremos possui uma quantidade infinita de elementos, e está contido em K ; ou seja: K é infinito.

Observe ainda que todo extremo é um número racional; e como o conjunto Q é enumerável, segue-se que o conjunto E (dos extremos) é um infinito enumerável.

2.5 Representação em base 3

Qualquer elemento de K que seja extremo inferior (E_i) de intervalo restante na etapa F_n pode ser obtido assim: partindo do zero vamos somando (ou não) o dobro do comprimento (de intervalo) de cada etapa até a atual.

Exemplos:

$$\frac{8}{9} = 0 + 2.\tfrac{1}{3} + 2.\tfrac{1}{3^2}$$
$$\frac{2}{3} = 0 + 2.\tfrac{1}{3}$$
$$\frac{74}{81} = 0 + 2.\tfrac{1}{3} + 2.\tfrac{1}{3^2} + 0.\tfrac{1}{3^3} + 2.\tfrac{1}{3^4}$$
$$\frac{2}{247} = 0 + 0.\tfrac{1}{3} + 0.\tfrac{1}{3^2} + 0.\tfrac{1}{3^3} + 0.\tfrac{1}{3^4} + 2.\tfrac{1}{3^5}$$

Lembrando que: 0,125 = 0,1 + 0,02 + 0,005 = $0 + 1.\frac{1}{10} + 2.\frac{1}{100} + 5.\frac{1}{1000} =$

$0 + 1.\frac{1}{10} + 2.\frac{1}{10^2} + 5.\frac{1}{10^3}$ e que esta representação é chamada de decimal, ou **em base 10**, analogamente utilizaremos a representação **em base 3.**

Assim:

$$0,125_{(10)} = 0 + 1.\tfrac{1}{10} + 2.\tfrac{1}{10^2} + 5.\tfrac{1}{10^3}(= \frac{1}{8})$$
$$0,22_{(3)} = 0 + 2.\tfrac{1}{3} + 2.\tfrac{1}{3^2}(= \frac{8}{9})$$

Ou seja: $0{,}125_{(10)}$ é o número $\frac{1}{8}$ escrito em base 10.

$0{,}22_{(3)}$ é o número $\frac{8}{9}$ escrito em base 3.

Associando este raciocínio à nossa descrição dos extremos inferiores concluímos que: a representação em base 3 dos **extremos inferiores** possui **apenas dígitos 0 e 2.**

Para ilustrar vamos escrever nossos exemplos anteriores em base 3 :

$$\frac{2}{3} = 0 + 2.\tfrac{1}{3} = 0,2_{(3)}$$
$$\frac{74}{81} = 0 + 2.\tfrac{1}{3} + 2.\tfrac{1}{3^2} + 0.\tfrac{1}{3^3} + 2.\tfrac{1}{3^4} = 0,2202_{(3)}$$
$$\frac{2}{247} = 0 + 0.\tfrac{1}{3} + 0.\tfrac{1}{3^2} + 0.\tfrac{1}{3^3} + 0.\tfrac{1}{3^4} + 2.\tfrac{1}{3^5} = 0,00002_{(3)}$$

Exceto o 1 observe que qualquer outro extremo superior (E_s) de intervalo restante em F_n pode ser escrito como um extremo inferior que "surgiu"(apareceu como extremo pela primeira vez) em F_n de onde subtrai-se um comprimento de intervalo.

Assim $E_s = E_i - \frac{1}{3^n}$ em base 3: $E_s = 0, a_1a_2...2 - 0,00...1 = 0, a_1a_2...1$

Concluímos então que: a representação dos **extremos inferiores** em base 3 possui apenas **dígitos 0 e 2 até o penúltimo; somente o último dígito não nulo pode ser 1**; todos além dele devem ser iguais a zero.

2.6 K é enumerável?

Consideremos o conjunto C: conjunto dos reais tal que sua representação em base 3 só possui dígitos 0 e 2, ou se possuir dígito 1 este é único e é o último não-nulo.

Seja f: $\mathbf{N} \to C$ qualquer.

$$f(1) = 0, a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\ldots \in C$$
$$f(2) = 0, a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\ldots \in C$$
$$f(3) = 0, a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\ldots \in C$$
$$f(n) = 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4}\ldots \in C$$

Seja $c = 0{,}c_1c_2c_3c_4 \ldots \in C$ tal que $c_i \neq a_{ii}$
$c \neq f(1)$ pois $c_1 \neq a_{11}$
$c \neq f(2)$ pois $c_2 \neq a_{22}$
$c \neq f(\mathrm{n})$ pois $c_{\mathrm{n}} \neq a_{\mathrm{nn}}$ qualquer que seja o n natural

Traduzindo: $c \in C$ e não é imagem pela f de nenhum $n \in N$; logo f não é sobrejetora. Conclusão: C é infinito e não existe uma bijeção entre **N** e C. Daí C é não-enumerável.

Mostremos que $K = C$: da definição, temos que $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Se $x \notin \bigcap_{n\in N} F_n$, então

$\exists\, p$ o menor natural tal que $x \notin F_P \Rightarrow$

$E_s < x < E_i$ onde E_i e E_s surgem em $F_P \Rightarrow$
$0{,}a_1a_2\ldots1_{(3)} < x < 0{,}\ a_1a_2\ldots2_{(3)} \Rightarrow$
x é da forma $0,\ a_1a_2\ldots1\ a_{p+1}a_{p+2}\ldots_{(3)}$ com $a_1\ldots a_{p-1} = 0$ ou 2 e algum dos a_{p+k} não nulo $\Rightarrow x \in \boldsymbol{C}$

Lido no sentido direto, o argumento apresentado mostra que $\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{K}$. Com poucas modificações podemos lê-lo da última para a primeira linha, e assim mostra-se que $\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{K}$.

Ou seja: K = C, de onde concluímos que K é não-enumerável.

Observação: Em nenhuma das referências o fato K = C é demonstrado (é apenas mencionado).

2.6.1 Algumas conclusões:

1) Da representação em base 3 dos números reais e lembrando que 1 = 0; $222\ldots_{(3)}$ concluímos que $x \in K \Rightarrow (1 - x)$ e $3x \in$ K desde que sejam menores que 1.
2) como $\mathbf{K} \subset \mathbf{R}$;**R** é não-enumerável;
3) como **R** = **Q** $\cup$ (R - Q)(*irracionais*) o conjunto dos irracionais é não-enumerável;
4) daí existem irracionais em K (uma quantidade não-enumerável).

Então, em certo sentido os irracionais são maioria em K.

2.6.2 Observações:

1) Apesar de pesquisar e consultar especialistas, o autor ainda È **incapaz de exibir** sequer **um** único número **irracional pertencente a K** que possa ser expresso **em termos de** outros irracionais 'famosos' como **raízes**, π ou *e*.
2) Entretanto, o número 0; 022020020000200000002...(3) (onde os algarismos 2 ocupam posições dadas pelos números de fibonacci excluindo os dois primeiros) é um número irracional e pertence ao conjunto de Cantor. Uma aproximação para ele é 0,3048328352 (até a décima casa decimal).

Bem, chamei-o *número de* ***Cantor-Fibonacci*** *(κ),* κ = 0,022020020000200000002...(3). Batizei seu complemento (1- κ) de *o número de* ***Rosa*** (ρ).

$$\rho = 0{,}022020020000200000002...(3) \approx 0{,}6951671648$$

Obs.: 1,1,2,3,5,8,13,21,... È chamada a sequência de fibonacci. Tem belíssimas propriedades!

2.7 E é denso em K e K é perfeito

$x \in K \Rightarrow$ em cada etapa da construção F_n; $\exists$ um intervalo onde x está contido. Assim seja x_1 um dos extremos ($\neq x$) do intervalo de F_1 que contém x.

Seja x_2 um dos extremos do intervalo ($\neq x$) de F_2 que contém x.

Definamos indutivamente x_n como um dos extremos do intervalo ($\neq x$) de F_n que contém x. Consequência: $|x - x_n| < \frac{1}{3^n}$

Sabe-se que **R** goza da **propriedade arquimediana**: dados a,b $\in$ **R** , existe um natural n_0 tal que $n_0.a > b$.

Uma consequência: dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um natural n_0 tal que se $n \geq n_0$ vale $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Como $3^n > n$, temos $\frac{1}{3^n} < \frac{1}{n}$.

Assim dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um natural n_0 tal que se $n \geq n_0$ vale $0 < \frac{1}{3^n} < \varepsilon$.

Assim temos que $x_n \to x$. Como (x_n) é sequência em E, o argumento acima mostra que o conjunto dos extremos de intervalos é denso em K. Mais ainda: dado qualquer $x \in K$; $\exists(x_n)$ sequência em K, $(x_n) \neq x$ e $x_n \to x$. Ou seja: todo elemento de K é ponto de acumulação do conjunto. Um conjunto onde todo ponto é de acumulação é dito **conjunto perfeito** (ver[Ru]).

3 $\frac{1}{4}$ está em K !

3.1 Aproximando 1/4 por elementos de K - construindo uma sequência de extremos em K

Observe no desenho os seguintes pontos:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \sum_{i=1}^{1} \frac{(-1)^{i+1}}{3^i} = E_1$$
$$\frac{2}{9} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \sum_{i=1}^{2} \frac{(-1)^{i+1}}{3^i} = E_2$$
$$\frac{7}{27} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = \sum_{i=1}^{3} \frac{(-1)^{i+1}}{3^i} = E_3$$
$$\frac{20}{81} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} = \sum_{i=1}^{4} \frac{(-1)^{i+1}}{3^i} = E_4$$
$$\frac{61}{243} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{243} = \sum_{i=1}^{5} \frac{(-1)^{i+1}}{3^i} = E_5$$

Obs.: $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, -\frac{1}{81}, \frac{1}{243}, ...)$ é uma progressão geométrica de razão $q = \frac{-1}{3}$

Definamos a sequência $(E_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{3^i}$. (E_n) é sequência de extremos em K.

3.2 Os termos de (E_n) estão cada vez mais próximos - (E_n) é sequência de Cauchy

Da construção acima observamos o seguinte: $|E_{n+1} - E_n| = \frac{1}{3^{n+1}}$;
concluímos que se $m > n$, $|E_m - E_n| < \frac{1}{3^n}$.

Como dado qualquer $\epsilon > 0, \exists n_0$, tal que $n > n_0 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{3^n} < \epsilon$, temos que

dado qualquer $\varepsilon > 0$, $\exists n_0$, tal que $n \geq n_0 \Rightarrow | E_m - E_n| < \varepsilon$.

Isto caracteriza (En) como uma **sequência de Cauchy.**

3.3 **R** é completo - (E_n) converge

Como estabelecido por Dedekind, **R** é um corpo ordenado e satisfaz o "axioma do Supremo"; uma forma equivalente desta propriedade é: "uma sequência é convergente em **R** se, e somente se é sequência de Cauchy". Com isto concluímos que (E_n) È uma sequência convergente.

Calculemos seu limite: $\lim_{n\to\infty}(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{3^i}$ Escrito desta forma e auxiliados pela observação da seção 3.1 notamos que o limite de (E_n) é a soma dos termos da P.G. de razão $q = \frac{-1}{3}$, e onde o primeiro termo é $\frac{1}{3}$. Sabemos então que

$$\lim_{n\to\infty}(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{3^i} = \frac{1/3}{1-(-1/3)} = \frac{1/3}{4/3} = \frac{1}{4}$$

Sabemos que K È um conjunto fechado; toda sequência de elementos dele converge para elementos do conjunto.

Conclusão: $\dfrac{1}{4} \in K!$

De fato, $(\dfrac{1}{9}, -\dfrac{1}{9^2}, \dfrac{1}{9^3}, -\dfrac{1}{9^4}, ...)$ e $(\dfrac{2}{81}, \dfrac{2}{81^2}, \dfrac{2}{81^3}, \dfrac{2}{81^4}, ...)$ são P.G. cujas somas definem (da mesma forma vista na seção 3.1) sequências de extremos em K.

Os limites das respectivas somas são $\dfrac{1}{10}$ e $\dfrac{1}{40}$ donde $\dfrac{1}{10}$ e $\dfrac{1}{40} \in K$.

Da seção 2.6.1, $x \in K \Rightarrow (1 - x)$ e $3x \in K$ desde que sejam menores que 1. Com isto,

$$\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10}, \frac{1}{40}, \frac{3}{40}, \frac{7}{40}, \frac{9}{40}, \frac{13}{40}, \frac{27}{40}, \frac{37}{40}, \frac{39}{40} \in K$$

Um artigo de pesquisa publicado em 1990 por Charles R. Wall na revista *The Fibonnacci Quarterly* demonstra que estes 14 números são os únicos em todo o conjunto K que possuem expansão decimal terminada!

Em 2001 Barak Weiss publicou um artigo no jornal *Proceedings of the London Mathematical Society* onde demonstra essencialmente que a "quantidade" elementos de K que podem ser bem aproximados por racionais, é "irrisória". Em outras palavras, o conjunto formado por tais elementos de K tem medida nula no próprio conjunto.

3.4 Uma conclusão: a intuição geométrica não é suficiente

O fato de K, um conjunto de tão simples construção, possa ter comprimento zero, sem possuir pontos isolados e ser não enumerável, além de possuir elementos como os 14 acima (quem à primeira vista esperaria por isto?), soa como um alerta: a intuição geométrica tão presente e útil como guia, pode enganar ou não revelar toda a riqueza de detalhes sobre um objeto de estudo. Para garantirmos o completo entendimento, mais que resolver exercícios o estudante deve procurar entender os conceitos mais profundamente e sempre tentar demonstrar aquilo que lhe parece intuitivamente correto.

4. Uma aplicação à Biologia

Biólogos têm interesse no comportamento a longo prazo de populações de certas espécies, ou de um conjunto de espécies. Dados certos parâmetros observados ou determinados experimentalmente (número de predadores, aridez do clima, quantidade de alimento disponível, entre outros) o biólogo determina um modelo matemático para descrever as flutuações na população. O modelo pode ser descrito por equações diferenciais ou equações de diferenças dependendo respectivamente se a população é assumida variando continuamente ou discretamente, neste último caso quando a população é medida a cada ano ou a cada geração.

Em qualquer caso o biólogo está interessado no que acontece a uma população com uma quantidade inicial P_0 de indivíduos. Será que a população tende a zero, levando à extinção das espécies? Será que a população cresce arbitrariamente levando à superpopulação e tornando o ecossistema instável? Ou a população mostrará com o tempo flutuações periódicas, ou mesmo aleatórias? Este problema encarado pelos biólogos é uma questão típica de sistemas dinâmicos: dado P_0, pode-se prever o comportamento da população a longo prazo?

O modelo de Lotka-Volterra determina o que acontece à população estudada estudando o comportamento assintótico da função

$$f(x) = kx(1 - x)$$

onde x representa a fração da população total que dada espécie representa.

A função acima, conhecida como função logística, e sua dinâmica, têm sido objeto atual (1986) de pesquisa matemática, pois muitas complicações e patologias emergem deste simples sistema (a função é apenas quadrática!).
Um conjunto é dito um **conjunto de Cantor** quando é fechado, totalmente desconexo, e todos os seus pontos são de acumulação - lista de propriedades do nosso objeto inicial de estudo, o **conjunto de Cantor dos terços médios**.

Quando na função acima o fator k é > $(2 + 5^{1/2})$ pode-se claramente identificar na figura uma região intermediária do domínio (intervalo [0,1]) que na primeira iteração, ou seja, no cálculo de $f(x)$, leva à superpopulação; sabemos isso levando horizontalmente o valor calculado na reta y = x, e notando que este último (que deveria representar uma fração da população) é maior que 1. Assim o conjunto de valores iniciais para os quais a população com o decorrer do tempo tende ao equilíbrio, não pode conter esta região intermediária (figura 3 abaixo).

Uma iteração seguinte é obtida da anterior levando verticalmente o ponto da reta y = x novamente na função , e depois disso, levar o valor calculado na reta y = x de novo.

Mas o problema não acaba; nas regiões adjacentes que restam, existem pontos para os quais não a primeira, mas a segunda iteração conduz ao problema acima. Estes pontos "problemáticos" formam novamente uma região intermediária (de cada restante), que deve ser retirada (ver figura 4, pág. seguinte).

O problema persiste indefinidamente; após n retiradas, temos 2^n regiões restantes contendo pontos (formando uma região intermediária) que levam ao problema de superpopulação após $n + 1$ iterações .

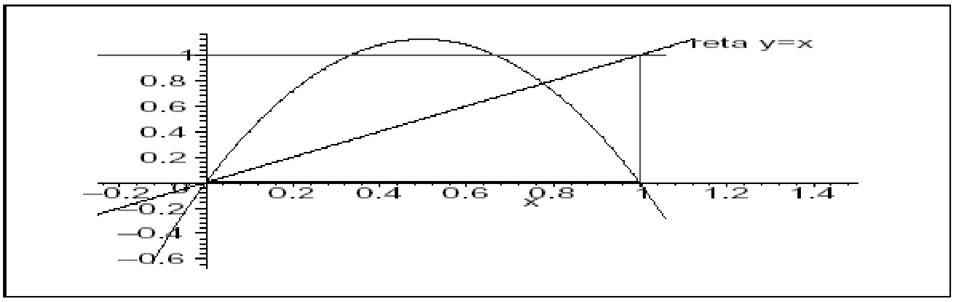

Figura 2: Função solução para k = 4,5.

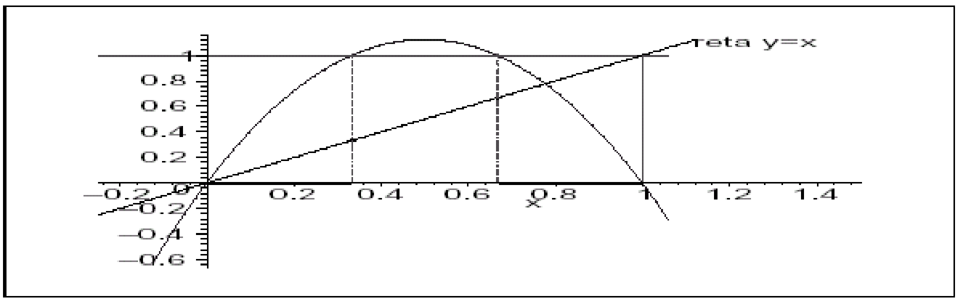

Figura 3: A região do meio leva ao desequilíbrio.

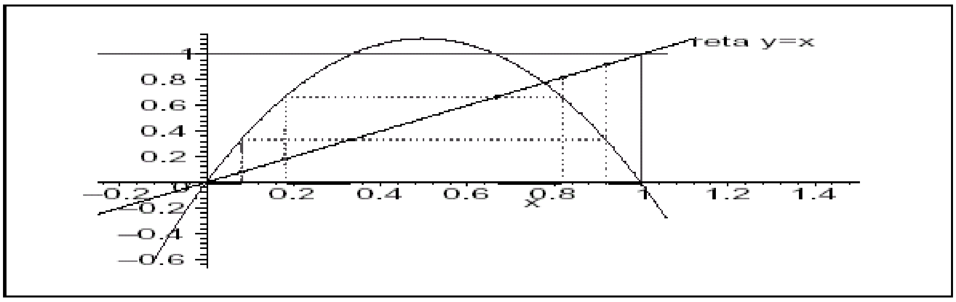

Figura 4: Regiões intermediárias das restantes também levam ao desequilíbrio.

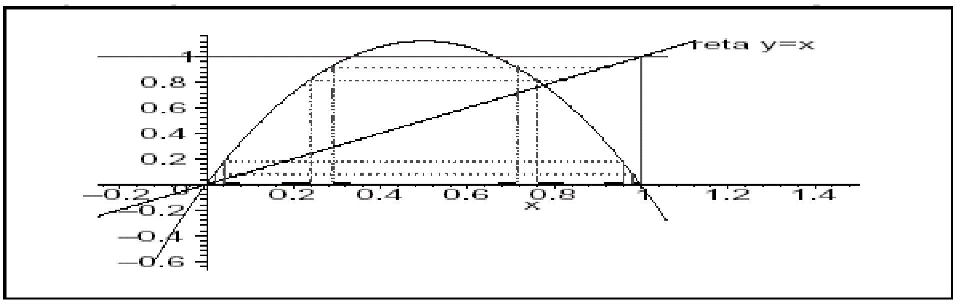

Figura 5: Regiões intermediárias das restantes também levam ao desequilíbrio.

Observando as figuras em sequência nos damos conta de que o processo de identificação do conjunto de valores da população inicial, para os quais o ecossistema pode alcançar o equilíbrio, leva a um conjunto de Cantor.
Obs.: A demonstração deste fato (pp.38, Teo 5.6) e uma formidável introdução ao estudo dos **sistemas dinâmicos** - área da matemática onde o Brasil atingiu excelência, com nomes como Maurício Peixoto, Jacob Palis Jr., entre outros - pode ser encontrada em [De], citado nas referências.

Referência Bibliográfica

Grande parte do que foi apresentado aqui pode ser encontrado em:

- [Ba] BARTLE, Robert G. - *The Elements of Real Analysis*. J .Wiley, Nova York,1964.
- [De] DEVANEY,Robert L. - *An intorduction to Chaotic Dynamical Systems*. Benjamin / Cummings, Califórnia, 1986.
- [Li] LIMA, Elon L. - Curso de Análise, vol.1,10.ed. IMPA, Rio de Janeiro, 2002.
- [Ru] Rudin, Walter - *Princípios de Análise Matemática.* Ao livro técnico, Rio de Janeiro, 1971.