Análise Histórica do Conceito de Função

Maria Helena Morais Silva
Bolsista do PADCT - UFF / 1996

Wanderley Moura Rezende *(Profº - Orientador:)*
Mestre em Matemática - IM-UFRJ
Mestre em Educação Matemática - USU
Professor Assistente - GMA/UFF

Análise Histórica do Conceito de Função

"É preciso permitir aquela maturação indispensável à análise crítica das idéias, que leva naturalmente ao formalismo e ao rigor".

G. Ávila

Introdução

O conceito de função é fundamental não só para a Matemática como para a ciência em geral. É utilizado, por exemplo, no estudo do movimento de um corpo na cinemática, para calcular a quantidade de calor recebida por uma substância em um determinado tempo na termoquímica e no estudo da propagação do calor em uma barra unidimensional na calorimetria. Na Economia utilizam-se gráficos de funções para representar a alta da bolsa de valores ou investimentos estrangeiros na produção do país em um determinado espaço de tempo. Esse conceito tem aplicações em várias áreas do conhecimento, mas foi nas ciências naturais que teve origem, pois ele é o instrumento próprio para o estudo das leis naturais. É pelo estudo dessas leis que o homem pode dominar melhor os fenômenos naturais e defender-se ou aproveitar-se deles conforme sua necessidade.

Essas leis naturais surgem da observação e descrição dos fenômenos naturais. Os resultados obtidos são ordenados num quadro explicativo coerente, cujas conseqüências e previsões estabelecidas são confirmados por novas observações e experimentações. A partir desse quadro podemos observar que os fenômenos naturais, quando estão sob as mesmas condições iniciais, apresentam uma certa regularidade, isto é, comportamento idêntico; a esta regularidade chamamos lei natural.

Em [Caraça, 1989], o autor afirma que existem dois tipos de leis naturais: as leis qualitativas e as leis quantitativas. As leis qualitativas são aquelas que dizem respeito à variação de qualidade , isto é, àquilo que é inerente ao objeto estudado; as leis quantitativas dizem respeito à variação de quantidade, ou seja, a tudo que pode ser comparado ou medido. Na verdade, é dedicando-se à observação e experimentação, procurando "medir", tentando explicar por variações de quantidades, que se tece uma teia de leis quantitativas. Segundo Rezende [Rezende,1994], o estudo das leis quantitativas e, conseqüentemente, o surgimento do conceito de função foram, sem dúvida, de extrema importância para o desenvolvimento da Matemática e da ciência em geral. Afirma o autor que a introdução do ***conhecimento quantitativo*** por Galileu, que rejeitava os métodos de Aristóteles e Arquimedes, fez surgir uma nova Física. Uma Física preocupada em observar, quantificar e estabelecer relações entre as grandezas envolvidas no fenômeno.

A revolução na Física, a partir do século XI, ocorreu paralelamente à transformação profunda que se dava na Europa, onde cidades começavam a se surgir e nelas uma nova classe - a burguesia. As necessidades do comércio e da indústria exigiam um estudo do mundo exterior, tal como ele se apresentava, com as suas propriedades e seus processos de transformação. Os problemas de navegação, por exemplo, levaram a uma investigação cada vez mais cuidadosa do movimento, isto é, a um estudo quantitativo que permitisse medir e prever. O conceito de função foi então introduzido como o instrumento necessário para o estudo da nova realidade da ciência.

O desenvolvimento do conceito de função está intimamente relacionado com o de variável. Em [Caraça, 1989], o autor define função como um instrumento matemático, que tem como objetivo o estudo das leis quantitativas, cuja essência seja a correspondência entre dois conjuntos. Para isto, fez-se necessária uma representação simbólica para os conjuntos, pois, do contrário, ter-se-ia que utilizar sempre tabelas de resultados particulares e não se obteria a generalidade conveniente. Essa representação simbólica conseguiu-se pela introdução do conceito de variável. Convencionou-se que para representar qualquer elemento de um dado conjunto seria utilizado um determinado símbolo, por exemplo: x. A esse símbolo, representativo de qualquer elemento do conjunto, chamou-se variável.

Quando dizemos "seja E o conjunto dos números reais do intervalo (0,1) e seja x a sua variável", queremos dizer que o símbolo x sem coincidir com nenhum dos números reais deste conjunto, pode representar qualquer um. Ao caráter dialético deste conceito - a variável é e não é cada um dos elementos do conjunto - deve-se o fato de sua introdução na ciência ser relativamente recente. Os matemáticos enfrentaram grandes dificuldades até conseguirem conceber o conceito de variável e consequentemente, o de função. A essência do conceito de variável tem, como já vimos, uma natureza contraditória - é a síntese do ser e não ser. No entanto, o conceito de variável surgiu primeiramente com um caráter dinâmico, isto é, com a idéia de que a variável percorre um determinado intervalo assumindo vários valores. Só com a Teoria Estática da Variável do matemático Weierstrass é que ela passou a ter o caráter que mencionamos anteriormente.

1) Evolução Histórica do Conceito de Função

Nesta seção comentaremos um pouco a respeito da evolução histórica do conceito de função, analisando as dificuldades enfrentadas pelos matemáticos para sua concepção e as tentativas de generalização e aperfeiçoamento.

Jean Bernoulli (1718), por exemplo, experimentou várias notações para uma função de x, entre as quais a mais próxima da moderna foi fx. Ele identificava funções com expressões analíticas que envolviam apenas uma variável. Ele definiu *"(...) função duma grandeza variável a uma quantidade composta de qualquer maneira dessa grandeza variável e de constantes"*. Função para Bernoulli era uma única expressão analítica como: 2x+1, sen x, $x^2 + x$, etc. Ele não admitia que uma mesma função pudesse ser representada por duas expressões analíticas distintas.

Já Euler (1748) denotou uma função de x pelo símbolo f(x) - símbolo que se consagrou, pois tornou-se o mais usual para representar esse conceito. Ele definiu uma *"função de uma quantidade variável"* como "*qualquer expressão analítica formada daquela quantidade variável e de números e quantidades constantes*". Em [Boyer, 1968], o autor afirma que Euler primeiramente tinha em mente as funções algébricas e funções transcendentes elementares (trigonométrica, logarítmica e exponencial). O tratamento estritamente **analítico** das funções trigonométricas foi, na verdade, em larga escala, estabelecido na sua obra *Introductio in Analysin Infinitorum*, em 1748. O seno, por exemplo, já não era simplesmente um segmento de reta, mas um número ou uma razão:

$$senx = \frac{e^{\sqrt{-1}x} - e^{-\sqrt{-1}x}}{2\sqrt{-1}}$$

Euler definiu função através de expressões analíticas assim como Jean Bernoulli, mas trabalhou com fórmulas e relações entre elas. Em [Rezende, 1994], o autor afirma que foi o uso intenso do seu conceito de função que permitiu a Euler dar um tratamento mais analítico ao Cálculo.

Cauchy (1822) foi outro matemático que resgatou a importância do conceito de função para o Cálculo Diferencial e Integral. A grande contribuição de Cauchy foi o de fundamentar os conceitos básicos do Cálculo nos conceitos de função e limite, e transformar todo o cálculo diferencial e integral de variáveis em cálculo diferencial e integral de funções, assim como temos hoje em dia. Atualmente, ao invés de diferenciarmos curvas, derivamos funções.

Lagrange (1797) também definiu função utilizando a interpretação de relação entre uma ou mais quantidades variáveis como por exemplo, z = f(x,y) ou w = f(x,y,z). Este grande matemático denominou função "(...) *de uma ou várias quantidades alguma expressão para cálculo na qual estas quantidades entram de alguma maneira envolvida ou não com outras quantidades as quais são consideradas como dadas e com valores invariáveis enquanto as quantidades de função pode assumir todos os valores possíveis. Entretanto, em funções considera-se apenas quantidades que são supostas serem variáveis sem considerar as constantes com as quais podem estar envolvidas"*.

J.B.J. Fourier (1822) relaciona o conceito de função com o de "somas infinitas". Uma contribuição importante de Fourier para o conceito de função foi que, enquanto Bernoulli pensava somente em funções de uma única expressão analítica, Fourier já pensava em funções dadas por pedaços com várias fórmulas diferentes. Ele afirma em seu livro "*Théorie analytique de la chaleur*", de 1822, que certas funções y = f(x) podiam ser representadas por uma série da forma:

$$f(x) \approx \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi kx}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi kx}{L}\right)$$

onde os coeficientes a_n´s e b_n´s são determinados *a posteriori* pela "Transformada de Fourrier".

Assim, a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ periódica de período 2 L, definida por f(x) = x, $-L \le x \le L$ (fig.1) pode ser representada por:

$$f(x) \approx \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$$

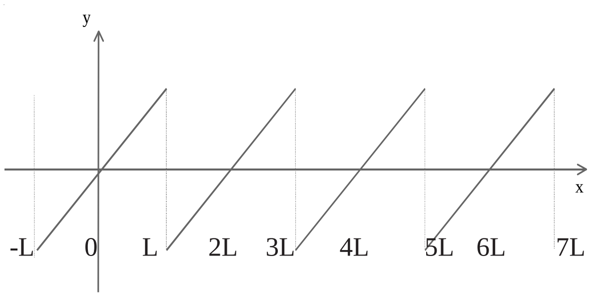


fig.1

Na tentativa de demonstrar as fórmulas de Fourier, Dirichlet (1837) procurou definir função de uma forma mais clara e explícita dizendo: "Uma função y(x) é dada se temos qualquer regra que associe um valor definido y a cada x em um certo conjunto de pontos". A interpretação que Dirichlet deu ao conceito de função utilizava a idéia de correspondência entre elementos de conjuntos. Ele acrescentou ainda em sua definição que: "Não é necessário que (a função) esteja sujeito à mesma lei, quando x percorre o intervalo".

Assim, podemos perceber ainda a presença do obstáculo cinético no conceito de variável ("...quando x percorre o intervalo...") na interpretação de Dirichlet. Para mostrar a natureza totalmente arbitrária dessa lei de correspondência, em 1828, Dirichlet definiu uma função muito "mal comportada": f(x) = 1, para x racional, e f(x) = 0, para x irracional. Observe que esta função é descontínua para qualquer valor de x e que não possui integral de Riemann em nenhum intervalo.

A definição de Riemann (1851) do conceito de função é muito parecida com a de Euler. Riemann percebeu que mais progressos exigiriam um conceito mais geral de integração para tratar de funções com infinitas descontinuidades. Usando a sua "integral de Riemann" foi capaz de dar exemplos de funções que violavam as condições de Dirichlet, mas que ainda satisfaziam o teorema de Fourier.

No entanto, foi com Stokes (1847) que o conceito de função se "libertou" do conceito de número. Stokes, ao contrário de seus antecessores, procurou pensar em funções que não necessitavam ser expressas por uma combinação de símbolos algébricos. Ele afirmou: "Realmente, parece-me de grande importância, pensar em funções independentes de todas as idéias de expressão algébrica".

Boole (1854) interpretou o conceito de função como uma transformação: "(...) trocamos x para 1, o resultado será expresso por f (1), e se na mesma função mudamos x para 0, o resultado será expresso por f (0) ". A idéia é de que a cada elemento x teremos um elemento transformado f (x). Dedekind (1887) utilizou a idéia de "aplicação" para definir o conceito de função: "Por uma aplicação de um sistema S, uma lei entendida de acordo com o qual a cada determinado s de S existe associado a um determinado objeto o qual é chamado imagem de s e é denotado por f(s); dizemos, também que o f(s) corresponde ao elemento s, que f(s) é causado ou generalizado pela aplicação f sobre s e que é transformado pela aplicação f para f(s)".

Já Hardy (1908) explicitou melhor as propriedades básicas do conceito de função. Ele definiu função de uma maneira mais geral, utilizando a idéia de relação entre quantidades variáveis com três características básicas:

1. y é sempre determinado por um valor de x;
2. para cada valor de x, para qual y é dado, corresponde um e somente um valor y;
3. a relação entre x e y é expressa por meio de uma fórmula analítica na qual o valor de y corresponde a um dado valor de x e pode ser calculado por substituição direta de x.

Uma tradução da definição de Hardy para a linguagem simbólica foi feita por Peano (1911). Segundo este:

"Função = Relação u / {(y,x) Îu, (z,x) Îu, ∀ ""x, y, z; y = z}"

E foi, finalmente, com Bourbaki (1939) que o conceito de função atingiu o seu caráter mais geral e formal. A sua definição foi uma tradução da definição de Hardy para o contexto da teoria dos conjuntos:

"Sejam E e F dois conjuntos, os quais podem ou não podem ser distintos. A relação entre o elemento variável x de E e o elemento variável y de F é chamado relação funcional em y, se para todo x ÎE existe um único y ÎF, o qual é dado pela relação com x.

Damos o nome de função para a operação a qual deste modo associamos sempre um elemento x ÎE o elemento y ÎF o qual é dado pela relação com x; y é dito ser o valor da função para o elemento x, e a função é dita ser determinada pela relação dada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função".

Quando analisamos a evolução histórica do conceito de função, podemos perceber que os matemáticos, ao definirem o conceito de função, utilizaram três idéias básicas: a de relação entre quantidades variáveis (Lagrange, por exemplo), a de ***relação entre conjuntos*** (Bourbaki) e a de transformação (Boole). A seguir, analisaremos essas três interpretações do conceito de função.

2 - Interpretações Básicas do Conceito de Função

2.1) Relação entre quantidades variáveis

A interpretação do conceito de função como relação entre quantidades variáveis foi, sem dúvida, a mais utilizada pelos matemáticos dos séculos XVIII e XIX. Isto ocorreu devido ao surgimento da física quantitativa que, para o estudo dos fenômenos naturais, buscou quantificar e estabelecer relações entre as grandezas envolvidas. Esta interpretação, a de duas grandezas que variam uma dependendo da outra, é que tornou a função um instrumento fundamental para a ciência em geral.

Um exemplo dessa relação pode ser dado pelo problema clássico da queda-livre de um corpo. Em 1602, Galileu Galilei fez uma descoberta fundamental para a Física. Através de um estudo quantitativo, concluiu que a distância d percorrida por um corpo que cai é função do tempo t e que a relação funcional é dada por:

$$d = \frac{gt^2}{2},$$

onde g é a aceleração da gravidade.

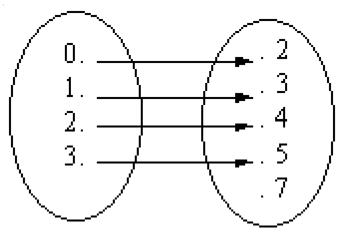
Podemos perceber que essa interpretação tem um caráter dinâmico e que mostra, de imediato, a utilidade prática desse conceito. Dentro da própria matemática, podemos pensar em vários exemplos de relações entre quantidades variáveis como: o perímetro (ou a área) de um quadrado que varia em função da medida do lado ou a soma dos ângulos internos de um polígono que varia de acordo com o número de lados.

Dentre os matemáticos que definiram função utilizando essa interpretação e que foram citados na seção anterior deste trabalho, podemos destacar Euler e Lagrange

2.2) Relação entre Conjuntos ou Correspondência entre Elementos

Apesar de a interpretação anterior ser mais intuitiva, a que é mais utilizada para definir o conceito de função nos meios acadêmicos é a de relação entre conjuntos. É a idéia de que a cada elemento x de um conjunto A se associa um único elemento f (x) de outro conjunto B, segundo uma relação definida de A em B. Esta interpretação é estática e tem um caráter mais formal que as demais. Bourbaki, por exemplo, utilizou esta interpretação para definir o conceito de função.

Seja, por exemplo, $X = \{0,1,2,3\}$, $Y = \{2,3,4,5,7\}$ e $f: X \rightarrow Y$ a função definida por $\{(0,2), (1,3), (2,4), (3,5)\}$. Tal função pode ser representada graficamente por diagrama (fig. 2), como segue:



(fig.. 2)

2.3) Transformação

A interpretação de função como uma transformação foi utilizada pelo matemático Boole em sua definição. É a idéia de que a função ***f*** transforma x no valor ***f*** (x). Esta se faz presente, por exemplo, nas transformações lineares entre espaços vetoriais ou nas funções complexas de variáveis complexas. Cabe ressaltar que já existem registros dessa interpretação em textos de ensino médio.

3) Comentários Finais

Analisando sua evolução histórica, percebemos que o conceito de função evoluiu de maneira gradual: “não nasceu pronto” e “acabado”, mas foi sendo ajustado às necessidades da Ciência e da Matemática. Nasceu como relação entre quantidades variáveis, utilizado como um instrumento para o estudo das ciências naturais. Os matemáticos enfrentaram grandes dificuldades para o desenvolvê-lo. Na evolução desse conceito, surgiram três interpretações distintas: a de ***relação entre quantidades variáveis***, a de ***relação entre conjuntos*** e a de ***transformação***.

A preocupação com o formalismo e o rigor da Matemática Moderna tornou a interpretação do conceito de função como ***relação entre conjuntos*** a mais usada para definir função. Esta interpretação tem um caráter mais geral que as demais. Porém, mais importante do que a definição formal é compreender o significado do instrumento matemático apresentado. Neste sentido, a idéia essencial desse conceito é a de ***variação***, que a interpretação como ***relação entre quantidades variáveis*** proporciona. É essa idéia que é trabalhada na Física, no Cálculo Diferencial e Integral, na Economia, na Química, etc., ou seja, a que está mais presente na realidade dos estudantes.

Em verdade, essa interpretação é a mais natural no cotidiano do cidadão. Quando compramos arroz, sabemos que o preço pago varia de acordo com o número de quilos comprados. Não pensamos que existe um conjunto A dos números de quilos de arroz e um conjunto B dos preços a serem pagos e que a relação entre eles é determinada por uma lei de formação. A idéia mais natural é a de variação do preço em relação à quantidade comprada.

Ora, se a interpretação como relação entre quantidades variáveis torna a aprendizagem do conceito de função mais intuitiva para o aluno e de maior aplicabilidade nas demais áreas do conhecimento, por que não partir dela para, após o domínio do conceito, chegar ao formalismo? Uma sugestão, dada por Byers (1982), para ajudar o professor a alcançar o objetivo de ensinar função pelo seu significado e compreensão é, dentro do contexto da resolução de problemas, procurar ter em mente o processo de evolução histórica deste conceito.

Bibliografia

ÁVILA, G.; Evolução do Conceito de Função e Integral; SBM; 1985;

BOYCE, W.E. e **DIPRIMA**, R.C.; Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno ; Editora Guanabara; Rio de Janeiro; 1977;

BOYER, C.B.; História da Matemática; Editora Edgar Blucher; 1968;

BOYER, C.B.; The History of the Calculus and its Conceptual Development; Editora Dover; 1959;

BYERS, V.; Porque Estudar a História da Matemática ?; International Journal Mathematics Education, Science and Technologie; vol. 13; 1982;

CARAÇA, B. de J.; Conceitos Fundamentais da Matemática; Liv. Sá da Costa Editora; Lisboa; 1989;

FIGUEIREDO, D.G. de; Análise de Fourrier e Equações Diferenciais Parciais; IMPA/CNPQ; Rio de Janeiro; 1977;

PEREIRA, L.M.C.; A Evolução do Conceito de Função; Projeto Fundão (UFRJ e GEPEM); 1990;

REZENDE, W.M.; Uma Análise Histórica Epistêmica da Operação de Limite; MEM/USU; 1994;