A INTEGRAL E A CULTURA DO AUTOMÓVEL

Renato J. C. Valladares
Universidade Estácio de Sá
rjcv@urbi.com.br

INTRODUÇÃO

Uma simples olhada ao redor mostra a tecnologia e a industrialização. Seu produto símbolo - o automóvel – influencia a humanidade desde a segunda década do século XX, mudando hábitos e impondo novos paradigmas tecnológicos e culturais como a urbanização e a velocidade. Velocidade e deslocamento passaram a integrar a vida de todos, depois do advento do automóvel. O ato de "pegar a condução", que bilhões de pessoas praticam diariamente no deslocamento "casa $\rightarrow$ trabalho $\rightarrow$ casa", faz estas pessoas viverem a velocidade que possibilita o deslocamento em pouco tempo. Aspirações pessoais, leis de trânsito, competições esportivas e mil outros motivos fazem todo mundo conviver com o automóvel e a velocidade. As condições de trânsito mostram de maneira óbvia que a velocidade é uma grandeza variável. Este fato é confirmado por leis de trânsito, engarrafamentos e condições de ruas e estradas. Sob o ponto de vista matemático, isto significa que as funções são o instrumento adequado para estudar a velocidade e que a velocidade é um ótimo contexto para estudar as funções.

As funções são relacionadas com a velocidade na abordagem convencional do Cálculo, mas pouco se fala no automóvel. A propaganda diz que certo modelo "acelera de *0* a *100* em *10* segundos". A sinalização informa que o limite de velocidade é de 80 *km/h*. Carros têm velocímetros que mostram a velocidade a cada instante. As evidências são favoráveis, mas a abordagem convencional esquece o automóvel e fala de queda livre e pontos móveis que são importantes, mas motivam relativamente poucos estudantes, pois tem pouco impacto cultural. Nos tempos da criação do cálculo o automóvel ainda não existia, logo sua velocidade não podia ser usada no estudo das funções. Ao lado de quedas livres e pontos móveis, tangentes e áreas foram e são largamente usadas nos processos de ensino e aprendizagem do Cálculo, explorando aspectos geométricos importantes.

A área é um conceito bem conhecido e com forte impacto cultural. Todos sabem o que é área de um lote de terra, de uma sala ou de um campo de futebol. Entretanto a forma quadrangular é predominante nestes imóveis e suas áreas podem ser calculadas por métodos elementares que dispensam os recursos do Cálculo. As formas complexas são raras e, por isso, motiva relativamente poucos estudantes.

Ao não considerar o automóvel na introdução do Cálculo, a abordagem convencional impõe-se uma limitação que existia em tempos passados, mas deixou de existir há quase um século. Esta limitação tem o defeito de vincular o assunto – logo na introdução - à Geometria e à Cinemática, justamente em um tempo em que as aplicações do Cálculo ultrapassam, em muito, estas áreas de conhecimento. Desta forma, muitos estudantes com prioridades diferentes, recusam este vínculo, desacreditam na importância do Cálculo e, conseqüentemente, têm sérias dificuldades para aprendê-lo. Vale observar que embora o movimento dos automóveis seja um fenômeno da Cinemática, ultrapassa os limites desta ciência e se estende à cultura, da mesma maneira que a forma circular da roda ultrapassa a Geometria e se estende à vida de todos.

UMA SITUAÇÃO COMUM

Imaginemos que uma turma de Cálculo começou 1 mês depois da outra. Semanas mais tarde o aluno João aprendeu que a velocidade de um carro é a derivada da função deslocamento e acertou o exercício

Qual é a velocidade de um carro se a função deslocamento for $F(t) = t^2$?

Dois dias depois João entrou na sala da turma que iniciara na data certa e o professor mandou calcular uma função deslocamento de um automóvel em velocidade $2t$. João tinha condições de entender o exercício?

Como a velocidade é a derivada do deslocamento, é imediato que o deslocamento é uma primitiva da velocidade. Logo João não teria dificuldade para entender que a resposta é t^2, $t^2 + 3$ ou, em geral, $F(t) = t^2 + c$. João também entenderia que se a velocidade fosse f, então

1 –: *Uma primitiva F da velocidade f é uma função deslocamento. O deslocamento a partir do instante a satisfaz $F(a) = 0$. $F(t) - F(s)$ = deslocamento entre os instantes $s < t$.*

PERGUNTA: Vimos que a inversão da derivação resolve o problema do deslocamento. *Será que ela resolve outros problemas ?*

OUTRA ABORDAGEM PARA A INTEGRAL

A resposta é uma outra abordagem da integral. Iniciemos pelos conceitos definidos por produto.

PRODUTO: Se um carro se deslocar entre *2* e *5* horas a 40 *km/h*, então o deslocamento é $(5 - 2) \times 40$. Se um posto gastar *R$1,00* para estocar um barril de gasolina por um dia, gastará $(5 - 2) \times 40$ reais para estocar *40* barris entre os dias *2* e *5*,. Se a área da base de um reservatório cilíndrico for *40*, o volume entre as alturas *2* e *5* é $(5 - 2) \times 40$. A área limitada pelo gráfico da função constante *40* entre os pontos *2* e *5* é $(5 - 2) \times 40$.

O produto é simples, mas o uso é limitado, pois um carro raramente roda em velocidade constante. Para aproveitar espaço um reservatório pode não ser cilíndrico como é o caso do tanque de combustível de um carro. O estoque de um posto de gasolina não permanece constante, pois varia com o tempo devido às vendas. Em geral, as funções não são constantes.

PROBLEMA: Dado um conceito que em situações matematicamente simples é definido como um produto por um fator k, pode ser necessário definir este conceito em situações mais realistas, quando k deixa de ser constante e passa a ser uma função f. Coloca-se, desta forma, o problema de encontrar uma extensão do produto associada a f. No caso do deslocamento em velocidade f vimos acima que uma primitiva F de f é uma extensão do produto associada a f. Para equacionar o problema no caso geral, examinemos o seguintes fato:

UM FATO SIMPLES: *Suponhamos que entre 2 e 5 horas o carro de Pedro se desloca a 40km/h*; *o de Ana em velocidade variável f e o de Paulo, a 70km/h. Se $40 \leq f(x) \leq 70$ em todos os instantes x entre 2h e 5h, então os deslocamentos D_1, D_2 e D_3 dos carros de Pedro, Ana e Paulo, respectivamente, satisfazem $D_1 \leq D_2 \leq D_3$.*

Neste caso, $D_1 = 40 \times (5 - 2)$ e $D_3 = 70 \times (5 - 2)$. Se F for uma extensão do produto associada a f, segue-se de (1) que o deslocamento do carro de Ana é $D_2 = F(5) - F(2)$. Logo a desigualdade acima se escreve como

$40 \times (5 - 2) \leq F(5) - F(2) \leq 70 \times (5 - 2)$.

Em geral vemos que se F for o deslocamento em velocidade f, segue-se que: *Se $s < t$ e m, M forem números tais que $m \leq f(x) \leq M$, para todo x entre s e t, então $m(t - s) \leq F(t) - F(s) \leq M(t - s)$.*

Estas observações se ajustam ao volume, área e custo de estocagem citados acima. As desigualdades mostram que a extensão do produto, nestes casos, respeita a relação de ordem. É uma exigência natural que será tomada para base do caso geral. Por simplicidade suporemos que f tenha o domínio D_f conexo ou, segundo muitos autores, que D_f é um intervalo generalizado.

EXTENSÃO DO PRODUTO

2) DEFINIÇÃO: Seja f uma função. Diremos que uma função F é uma *extensão do produto associada a f* se $s < t \in D_f$ e m, M forem números que satisfaçam as desigualdades $m \leq f(x) \leq M$, para todo x entre s e t, então F deve satisfazer as desigualdades $m(t-s) \leq F(t) - F(s) \leq M(t-s)$.

Se f for velocidade, vimos em 1 que uma primitiva F de f é uma extensão do produto associada a f. Veremos abaixo que este é um fato geral.

3) TEOREMA DA EXTENSÃO DO PRODUTO: *Se F for uma primitiva de f então F é uma extensão do produto associada a f. Reciprocamente, se f for contínua e F for uma extensão do produto associada a f, então F é uma primitiva de f.*

PROVA: Seja F uma primitiva de f e tomemos números $s < t \in D_f$. Usando o teorema do valor médio, podemos concluir que existe c entre s e t tal que

$$F(t) - F(s) = F'(c)(t-s) = f(c)(t-s).$$

Se m e M forem números tais que para todo x entre s e t $m \leq f(x) \leq M$, tomando $x = c$ tem-se que $m \leq f(c) \leq M$. Logo $m(t-s) \leq f(c)(t-s) \leq M(t-s)$ e $m(t-s) \leq F(t) - F(s) \leq M$. Segue-se da definição 2 que F é uma extensão do produto associada a f.

A recíproca será demonstrada adiante em 4.

OBSERVAÇÃO: Em um certo sentido a derivada é uma extensão do quociente. Como produto e quociente resultam de operações inversas, o teorema da extensão do produto mostra que se entendermos a primitiva como uma extensão do produto, então *o aspecto "operação inversa" entre quociente e produto é preservado nas respectivas* *extensões*. Esta observação aumenta a credibilidade do Cálculo, o que facilita os processos de ensino e aprendizagem.

INTEGRAL: Se uma função f admitir primitiva F, usaremos as notações e resultados correntes na literatura, relacionando primitivas e integrais indefinidas e definidas. Isto é,

$$\int f(x)dx = F(x) + c \quad \text{e} \quad \int_a^t f(x)dx = F(t) - F(a).$$

APLICAÇÕES

ÁREA E VOLUME: Área é um conceito definido pelo produto da base pela altura. Assim, quando a altura for uma função h do ponto da base onde é medida, a área será uma extensão do produto associada a h. Por exemplo, para calcular a área entre o eixo $0x$ e o gráfico de uma função f, a altura medida a partir do ponto x na base será $h(x) = |f(x)|$ (fig.1). Como o teorema da extensão do produto mostra que se $|f|$ admitir primitiva, esta primitiva é uma extensão do produto associada a $|f|$, segue-se que a área desta região a partir da reta $x = a$ até a reta $x = t$ será a integral abaixo.

$$A(t) = \int_a^t | f(x) | dx.$$

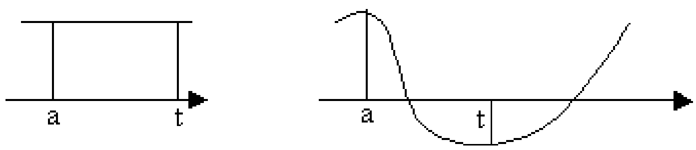

Figura 1.

Volume é "área da base vezes altura". Quando a área da base for uma função A do ponto da altura onde é medida, o volume será uma extensão do produto associada a A. Segue-se do teorema da extensão do produto, que o volume a partir da altura a até a altura t é

$$V(t) = \int_a^t A(s)ds\,.$$

Sólido de revolução: Para calcular o volume do sólido gerado pela revolução do gráfico de uma função f em torno do eixo $0x$, basta notar que em cada ponto x, a base do sólido é um círculo de raio $|f(x)|$, cuja área é $A(x) = \pi f(x)^2$ (fig.2).

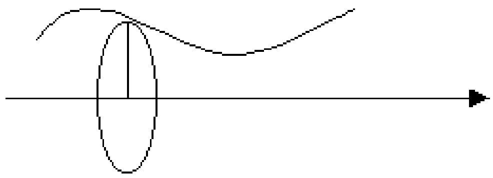

Figura 2.

Logo, o volume deste sólido a partir de um ponto a até um ponto t é

$$V(t) = \int_a^t \pi f(x)^2 dx\,.$$

Elipsóide: Para calcular o volume do sólido limitado pelo elipsóide $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$, tomaremos o segmento de extremos $(-a, 0, 0)$ e $(a, 0, 0)$ como sendo a altura. Neste caso, a base correspondente ao ponto $(t, 0, 0)$ é a região E_t limitada pela interseção do elipsóide com o plano $x = t$, que é a elipse de equação $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1 - (z/c)^2$ (fig.3)

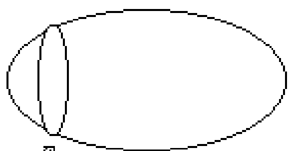

Figura 3.

Como os semi-eixos desta elipse são $B = (b/a)(a^2 - t^2)^{1/2}$ e $C = (c/a)(a^2 - t^2)^{1/2}$; $-a \leq t \leq a$, a área de E_t é $A(t) = BC\pi = bc\pi(a^2 - t^2)$. Logo, o volume procurado é

$$\int_{-a}^{a} A(t)dt = \int_{-a}^{a} bc\pi(a^2 - t^2)dt = \frac{4}{3}abc\pi$$

Observação: O cálculo do volume ficou simples porque usou a extensão *produto* $\rightarrow$ *integral*. Por não dispor desta extensão, o método clássico usa recursos geométricos complexos para adaptar a extensão *área* $\rightarrow$ *integral* ao cálculo do volume.

VAZÃO TOTAL: Se a taxa de vazão de um riacho for de $1.000m^3$ por dia, entre o dia a e o dia t, a vazão total será de $1000(t - a)m^3$. Se por questões climáticas a taxa de vazão for uma função do tempo $f(t)$, a vazão total é uma extensão do produto associada a f, que é

$$\int_a^t f(x)dx.$$

CUSTO DE ESTOCAGEM: O custo para um supermercado estocar *7* toneladas de arroz entre os dias a e t é $7(t - a)$ (quantidade vezes tempo) vezes o custo para estocar uma tonelada durante um dia. Se em decorrência das vendas a quantidade variar em função do tempo segundo $f(t)$, o custo de estocagem recai na extensão do produto associada a f que é a integral

$$\int_a^t f(x)dx.$$

Se o custo para estocar 1 tonelada durante 1 dia for c, o custo de estocagem será $c\int_a^t f(x)dx$.

Nota: Trabalhando sob a orientação do autor, Macêdo [M] contextualizou a integral no custo de estocagem, dando ao assunto uma abordagem extremamente motivadora para estudantes de Administração de Empresas.

OBSERVAÇÃO: Os estudos acima se adaptam a outras aplicações como trabalho, excedente do consumidor, etc. Esta é mais uma vantagem da extensão do produto que unifica a Matemática, ao usar recursos iguais em situações diferentes.

COMPRIMENTO DE ARCO: Fixemos um ponto $(a, f(a))$ no gráfico de uma função f. Dado outro ponto $(x, f(x))$, pode-se usar uma fita métrica para medir o comprimento do arco com estes extremos. Fazendo x variar, obtemos uma função

L(x) = comprimento do arco de extremos $(a, f(a))$ *e* $(x, f(x))$.

Para dispensar a fita métrica devemos determinar *L*. Para isto observemos que (fig.4).

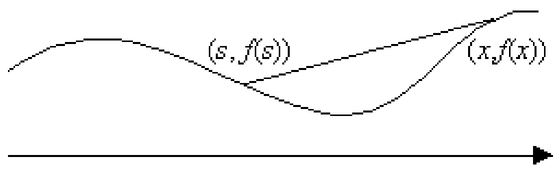

Figura 4.

$$|L(x) - L(s)| = \textit{comprimento do arco de extremos } (s, f(s)) \textit{ e } (x, f(x)).$$

Usaremos a hipótese básica que, quando $x \to s$, $|L(x) - L(s)|$ tende ao comprimento do segmento de reta com os mesmos extremos, que é $[(x - s)^2 + (f(x) - f(s))^2]^{1/2}$. Se $f'(s)$ existir, pode-se usar a aproximação linear de $f(x) - f(s)$ por $f'(s)(x - s)$ e concluir que

$$[(x - s)^2 + (f(x) - f(s))^2]^{1/2} \to |x - s|\sqrt{1 + f'(s)^2} \;\; se\ x \to s.$$

Analogamente, se $L'(s)$ existir segue-se que

$$|L(x) - L(s)| \to |x - s||L'(s)| \; se\ x \to s.$$

Nestas condições a hipótese básica mostra que $|x - s||L'(s)| \to |x - s|[1 + f'(s)^2]^{1/2}$ *quando* $x \to s$. Como as duas expressões se anulam no limite não se obtém nenhuma informação sobre *L*. Para superar esta dificuldade vamos reescrever a hipótese básica dizendo que *a razão entre* $|x - s||L'(s)|$ *e* $|x - s|[1 + f'(s)^2]^{1/2}$ *tende a 1 quando* $x \to s$. Isto é equivalente ao limite

$$\lim_{x \to s} \frac{|x - s||L'(s)|}{|x - s|\sqrt{1 + f'(s)^2}} = 1.$$

Decorre deste limite que

$$\lim_{x \to s} \frac{|x - s||L'(s)|}{|x - s|\sqrt{1 + f(s)^2}} = \frac{|L'(s)|}{\sqrt{1 + f(s)^2}} = 1.$$

Isto é, $|L'(s)| = [1 + f'(s)^2]^{1/2}$. Se *L* for crescente tem-se $L'(s) > 0$, logo $L'(s) = |L'(s)| = [1 + f'(s)^2]^{1/2}$, o que sugere definir o *comprimento do arco do gráfico de f entre a e x* por

i) $L(x) = \int_a^x [1 + f'(x)^2]^{1/2} dx$, se L for crescente. Se for decrescente multiplica-se a integral por *-1*.

MEDIDA E EXTENSÃO DO PRODUTO: A reta $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ é tangente ao gráfico no ponto $(a, f(a))$ e passa por $(a, f(a))$ e $(a + 1, f'(a) + f(a))$. A distância entre estes pontos é $[1 + f'(a)^2]^{1/2}$. Logo o comprimento desta reta entre $(a, f(a))$ e $(t, f(t))$ é o produto $(t - a)[1 + f'(a)^2]^{1/2}$. Se a derivada for $f' = constante$ o comprimento do arco do gráfico de f coincidirá com este produto. Se f' não for constante, o número $[1 + f'(a)^2]^{1/2}$ transforma-se na função $g(x) = [1 + f'(x)^2]^{1/2}$. Logo, o comprimento do arco é uma extensão do produto associada a g. Esta extensão é a integral (i). Este raciocínio se aplica a outras medidas, pois medir é multiplicar pela unidade de medida quando esta unidade for constante. Quando a unidade de medida passa a ser uma função g, a medição passa a ser uma extensão do produto associada a g.

EXISTÊNCIA DE PRIMITIVAS;

Uma prova sem continuidade uniforme

4 – PROVA DA RECÍPROCA DO TEOREMA 3: Para estudar o limite da razão incremental de F em 3, tomemos um número real $\varepsilon > 0$. Como f é contínua, existe um número real $\delta > 0$ tal que se $|t - s| < \delta$, então $|f(t) - f(s)| < \varepsilon/2$. Nestas condições, se x estiver no intervalo de extremos s e t, segue-se que $|x - s| < \delta$ e que $|f(x) - f(s)| < \varepsilon/2$. Isto significa que para todo x entre s e t, $f(s) - \varepsilon/2 < f(x) < f(s) + \varepsilon/2$. Se $t > s$, usando a definição 2 com $m = f(s) - \varepsilon/2$ e $M = f(s) + \varepsilon/2$, segue-se que $(f(s) - \varepsilon/2)(t - s) \leq F(t) - F(s) \leq (f(s) + \varepsilon/2)(t - s)$. Logo

i) $f(s) - \varepsilon/2 \leq \dfrac{F(t) - F(s)}{t - s} \leq f(s) + \varepsilon/2.$

Como

$$\frac{F(s) - F(t)}{s - t} = \frac{F(t) - F(s)}{t - s},$$

as desigualdades (i) valem se $t < s$. Isto é, (i) vale se $s \neq t$. Desenvolvendo-a segue-se que

$$\left|\frac{F(t) - F(s)}{t - s} - f(s)\right| < \varepsilon \text{ e que } \lim_{t \to s} \frac{F(t) - F(s)}{t - s} = f(s) = F'(s).$$

5 – EM BUSCA DA EXTENSÃO DO PRODUTO: Seja f uma função (não necessariamente contínua) limitada em um intervalo fechado $[a, t]$. Isto é, existem o ínfimo e o supremo

$$h = inf\,\{f(x);\, x \in [a, t]\} \text{ e } H = sup\{f(x);\, x \in [a, t]\}.$$

Como h e H satisfazem as desigualdades $h \leq f(x) \leq H$ para todo $x \in [a, t]$, uma extensão do produto F associada a f (se existir) satisfaz $h(t - a) \leq F(t) - F(a) \leq H(t - s)$. Se $F(a) = 0$ estas desigualdades se escrevem como

i) $h(t - a) \leq F(t) \leq H(t - s)$.

ii) Aproximações: O primeiro membro de (i), $h(t - a)$, é uma aproximação para $F(t)$ por falta e o 2º membro, $H(t - a)$, é uma aproximação por excesso. Para obter outra aproximação tomemos $s \in [a, t]$ e sejam os números

$$h_1 = inf\,\{f(x);\, x \in [a, s]\};\; H_1 = sup\{f(x);\, x \in [a, s]\}$$

e

$$h_2 = inf\,\{f(x);\, x \in [s, t]\};\;\; H_2 = sup\{f(x);\, x \in [s, t]\}.$$

Os mesmos raciocínios mostram que

$$h_1(s - a) \leq F(s) - F(a) \leq H_1(s - a) \text{ e } h_2(t - s) \leq F(t) - F(s) \leq H_2(t - s).$$

Como $F(a) = 0$ e $F(s)$ aparece com os sinais trocados, somando as desigualdades, tem-se

iii) $h_1(s - a) + h_2(t - s) \leq F(t) \leq H_1(s - a) + H_2(t - s)$.

Estas desigualdades mostram que $h_1(s - a) + h_2(t - s)$ é uma aproximação para $F(t)$ por falta e $H_1(s - a) + H_2(t - s)$, por excesso. Como não é difícil provar que

iv) $h(t - a) \leq h_1(s - a) + h_2(t - s)$ *e* $H(s - a) \geq H_1(s - a) + H_2(t - s)$,

segue-se que as aproximações (iii) são melhores que as aproximações (i).

6 - SOMAS DE RIEMANN: Vamos generalizar as idéias acima, introduzindo mais pontos no intervalo $[a, t]$ para obter aproximações cada vez melhores para F. Para formalizar estas idéias diz-se que um conjunto $p = \{b_0, b_1, ..., b_k\}$ é uma *partição* de $[a, t]$ se $a = b_0 \leq b_1 \leq ... \leq b_k = t$. Neste caso, $p \subset [a, t]$ e $e = \{a, t\}$ é uma partição para $[a, t]$. Se $a = t,$ então $\{a\}$ é a única partição de $[a, a]$.

Seja um função f (não necessariamente contínua) cujo domínio D_f é um intervalo generalizado. Tomemos pontos $a \le t$ em D_f e suponhamos que f é limitada em $[a, t]$. Dada uma partição $p = \{b_0, b_1, ..., b_k\}$ para $[a, t]$, cada conjunto $\{f(x); x \in [b_{i-1}, b_i]\}$é limitado e não vazio. Logo admite supremo e ínfimo

$$H_i = sup\{f(x); x \in [b_{i-1}, b_i]\} \text{ e } h_i = inf\{f(x); x \in [b_{i-1}, b_i]\}.$$

Usando H_i e h_i definiremos as somas R_p e r_p abaixo que são conhecidas, respectivamente, como *somas de Riemann majorante e minorante* da função f, associadas à partição p.

$$R_p = H_1(b_1 - b_0) + ...+ H_k(b_k - b_{k-1}) \text{ e } r_p = h_1(b_1 - b_0) + ... + h_k(b_k - b_{k-1}).$$

Como $h_i \le H_i$ tem-se

i) $r_p \le R_p$. *Se* $t = a$, *então a única partição é* $\{a\}$ *e* $R_{\{a\}} = r_{\{a\}} = f(a)(a - a) = 0$.

Segue-se dos raciocínios em 5 que se F for uma extensão do produto associada a f, com $F(a) = 0$, então

ii) $r_p \le F(t) \le R_p$.

iii) **Refinamento**: Vamos usar as desigualdades acima para construir extensões do produto associadas a f. Para isto dadas duas partições p e q de $[a, t]$, diz-se que *p refina q*, se $q \subset p$. O seguinte fato é bem conhecido. *Se p e q forem partições de $[a, t]$ tais que p refina q, então $r_q \le r_p \le R_p \le R_q$.*

7 – ***R*(*a, t*), *r*(*a, t*), *F*$_R$(*t*) e *F*$_R$(*t*)**: Tomemos uma partição q de $[a, t]$. Se n for uma partição qualquer de $[a, t]$, a união $p = q \cup n$ refina q e n. Logo $r_q \le r_p \le R_p \le R_n$, isto é, $r_q \le R_n$ e, analogamente, $r_n \le R_q$. Conseqüentemente, se tomarmos os conjuntos

$$R = \{R_p;\ p \text{ é partição para } [a, t]\} \text{ e } r = \{r_p;\ p \text{ é partição para } [a, t]\},$$

segue-se que R_q é cota superior para r e r_q é cota inferior para R. Como estes conjuntos não são vazios, existem os números

i) $R(a, t) = inf\, R$ e $r(a, t) = sup\, r$.

Se p for partição de $[a, t]$, $R_p \in R$ e daí, $R(a, t) \le R_q$. Como R_p é cota superior para r segue-se que $r(a, t) \le R_q$. Como vale resultado similar para r_p, segue-se que

ii) $r_p \le r(a, t) \le R_p$ e $r_p \le R(a, t) \le R_p$.

iii) **$F_r(t)$ e $F_R(t)$**: Denotando $F_r(t) = r(a, t)$ e $F_R(t) = R(a, t)$ obtemos funções $F_r(t)$ e $F_R(t)$ definidas nos pontos $t \ge a$, em D_f. Segue-se de (ii) que $r_p \le F_r(t) \le R_p$ e $r_p \le F_R(t) \le R_p$. Como 6.(i) mostra que $F_r(a) = F_R(a) = 0$ vemos que F_r e F_R atendem as exigências de extensões do produto em 6.(ii). Este fato nos leva a perguntar se estas funções são extensões do produto associadas a *f*. A resposta é afirmativa como veremos no teorema 12, cuja prova recai no problema abaixo.

iv) **Problema**: Calcular $F_r(t)$ - $F_r(s)$ e $F_R(t) - F_R(s)$. A solução está no lema abaixo.

8 - LEMA: *Se f for limitada em* $[a, t]$ *e* $s \in [a, t]$, *valem as seguintes igualdades*:

i) $R(a, t) = R(a, s) + R(s, t)$; $r(a, t) = r(a, s) + r(s, t)$;

ii) $F_R(t) - F_R(s) = R(s, t)$; $F_r(t) - F_r(s) = r(s, t)$.

PROVA: Dada uma partição q de $[a, t]$, a partição $p = q \cup \{s\}$ refina q e daí, $R_q \geq R_p$. Logo, para determinar o ínfimo $R(a, t)$, basta considerar as partições que contenham s. Isto é,

iii) $R(a, t) = inf\,\{R_p;\ p \text{ é partição de } [a, t] \text{ e } s \in p\}$.

Por outro lado, uma partição p de $[a, t]$ satisfaz à condição $s \in p$ se, e somente se, $p = p_1 \cup p_2$ onde p_1 é partição de $[a, s]$ e p_2 é partição de $[s, t]$. Como $[a, s]$ e $[s, t]$ são subconjuntos de $[a, t]$ e como f é limitada em $[a, t]$, segue-se que f é limitada em $[a, s]$ e em $[s, t]$. Conseqüentemente para quaisquer partições p_1 e p_2 como acima, as somas R_{p1} e R_{p2} estão definidas e vale a igualdade

$$R_p = R_{p1} + R_{p2}.$$

Esta igualdade permite escrever (iii) como

iv) $R(a, t) = inf\,\{R_{p1} + R_{p2};\ p_1 \text{ é partição de } [a, s] \text{ e } p_2 \text{ é partição de } [s, t]\}$.

Se tomarmos os conjuntos

$$A = \{R_{p1};\ p_1 \text{ é partição de } [a, s]\}$$

e

$$B = \{R_{p2};\ p_2 \text{ é partição de } [s, t]\},$$

a igualdade (iv) pode ser escrita em termos do conjunto soma $A + B$ como

v) $R(a, t) = inf\,(A + B)$.

Como f é limitada em $[a, s]$ e em $[s, t]$, existem os ínfimos

$$R(a, s) = inf\,A = inf\,\{R_{p1};\ p_1 \text{ é partição para } [a, s]\}$$

e

$$R(s, t) = inf\,B = inf\,\{R_{p2};\ p_2 \text{ é partição para } [s, t]\}.$$

Finalmente, usando igualdade bem conhecida $inf\,(A + B) = inf\,(A) + inf\,(B)$ tem-se

vi) $R(a, t) = R(a, s) + R(s, t)$.

Isto mostra a 1ª igualdade em (i). Como $R(a, t) = F_R(t)$ e $R(a, s) = F_R(s)$ a igualdade (vi) se escreve como $F_R(t) - F_R(s) = R(s, t)$, o que mostra a 1ª igualdade em (ii). A prova das outras igualdades é similar.

9 – OBSERVAÇÃO: O lema 8 resolve o problema 7.(iv) mas as funções F_r e F_R não estão definidas para números menores que a. Para superar esta limitação observemos que se f for limitada em $[s, t]$ e $a \in [s, t]$, segue-se do lema 8 que

$$R(s, t) = R(s, a) + R(a, t) \text{ e que } F_R(t) + R(s, a) = R(s, t).$$

Logo, se denotarmos $F_R(s) = -R(s, a)$ obtemos a igualdade

$$F_R(t) - F_R(s) = R(s, t)$$

que estende a solução do problema 7.(iv) ao caso $s \leq a \leq t$. Abaixo formalizaremos estas idéias.

10 - AS FUNÇÕES F_r e F_R: Seja f uma função limitada em todo intervalo fechado contido no domínio D_f. Se este domínio for um intervalo generalizado, pode-se fixar $a \in D_f$ e definir (em D_f) as funções

$$F_r(t) = r(a, t) \text{ se } t \geq a; \;\; F_r(t) = -r(a, t) \text{ se } t < a;$$

e

$$F_R(t) = R(a, t) \text{ se } t \geq a; \; F_R(t) = -R(a, t) \text{ se } t < a.$$

i) **Fato**: *Se* $s < t \in D_f$ *então* $F_r(t) - F_r(s) = r(s, t)$ *e* $F_R(t) - F_R(s) = R(s, t)$,

De fato: Vimos no lema 8 e na observação 9 que a 2ª igualdade vale se $a \leq s \leq t$ e se $s < a \leq t$. No caso $s < t < a$ o lema 8 assegura que $R(s, a) = R(s, t) + R(t, a)$. Logo,

ii) $-R(t, a) + R(s, a) = R(s, t)$.

Como $F_R(t) = -R(a, t)$ e $F_R(s) = -R(a, s)$, a igualdade (ii) mostra que $F_R(t) - F_R(s) = R(s, t)$, o que completa a prova da 2ª igualdade (i). A 1ª igualdade é similar.

Tomando $s < t$ em D_f e a partição $e = \{s, t\}$, segue-se de 7.(ii) que $r_e \leq r(s, t) \leq R_e$ e $r_e \leq R(s, t) \leq R_e$. Usando (i) nestas desigualdades obtemos

iii) $r_e \leq F_r(t) - F_r(s) \leq R_e$ e $r_e \leq F_R(t) - F_R(s) \leq R_e$.

11 - TEOREMA: *Seja f uma função cujo domínio é um intervalo generalizado* D_f *e seja* $a \in D_f$. *Se f for limitada em todos os intervalos fechados contidos em* D_f, *então as funções* F_R e F_r *são extensões do produto associadas a f.*

PROVA: Sejam $s < t \in D_f$ e tomemos números reais m e M tais que para todo $x \in [s, t]$, $m \leq f(x) \leq M$. Neste caso, $m \leq h \leq H \leq M$, onde

$$H = sup\{f(x); x \in [s, t]\} \text{ e } h = inf\{f(x); x \in [s, t]\}$$

Logo, a partição $e = \{s, t\}$ de $[s, t]$ satisfaz $m(t - s) \leq h(t - s) = r_e$. Isto é,

i) $m(t - s) \leq r_e$ e, analogamente, $R_e \leq M(t - s)$.

Levando estas igualdades em 10.(iii) segue-se que

$$m(t - s) \leq r_e \leq F_r(t) - F_r(s) \leq R_e \leq M(t - s)$$

e que

$$m(t - s) \leq F_r(t) - F_r(s) \leq M(t - s).$$

Isto mostra que F_r é uma extensão do produto associada a *f*. O caso F_R é similar.

12 - TEOREMA: *Se f for uma função contínua definida em um intervalo generalizado aberto, então f admite primitiva*.

PROVA: Como *f* é contínua segue-se do teorema de Weierstrass que *f* é limitada em todos os intervalos fechados contidos em D_f. Logo, para $a \in D_f$ fixado, pode-se definir as funções F_R e F_r que de acordo com o teorema 11 são extensões do produto associadas a *f*. Como *f* é contínua, segue-se do teorema da extensão do produto que F_R e F_r são primitivas de *f*, o que mostra o teorema.

i) – Conseqüências: Como o domínio D_f é um intervalo generalizado, segue-se que $F_R - F_r = constante$. Como $F_R(a) = F_r(a) = 0$ segue-se que $F_R = F_r = F$ *é a única primitiva de f que se anula em a*. Se G for uma extensão do produto que se anula em a, segue-se do teorema da extensão do produto que G é primitiva de *f*, o que pela igualdade $G(a) = 0$ mostra que $G = F$. Logo *F é a única extensão do produto associada a f que se anula em a*.

FUNÇÃO INTEGRÁVEL

13 -: Seja *f* uma função limitada num intervalo fechado de extremos *a* e *t*. Diz-se que *f* é *integrável* entre *a* e *t* se $F_R(t) = F_r(t) = F(t)$. Neste caso, usa-se a notação

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx\,.$$

Se *f* for integrável entre *a* e *t* e *s* estiver entre *a* e *t*, segue-se (lema 8) que *f* é integrável entre *a* e *s,* entre *s* e *t*, e

$$\int_a^t f(x)dx = \int_a^s f(x)dx + \int_s^t f(x)dx\,.$$

Seja $a \in D_f$. Se para todo $t \in D_f$, *f* for integrável entre *a* e *t*, diz-se que *f* é *integrável*. O teorema 12 e suas conseqüências mostram que *toda função contínua é integrável*. Muitos autores usam este enunciado para aquele teorema.

14 - PROPOSIÇÃO: *Seja f uma função limitada em todos os intervalos fechados contidos em* D_f. *Se F for uma extensão do produto associada a f tal que* $F(a) = 0$, *então para todo* $t \in D_f$,

$$F_R(t) \geq F(t) \geq F_r(t) \text{ se } t \geq a \text{ e } F_R(t) \leq F(t) \leq F_r(t) \text{ se } t \leq a.$$

Em particular, $F_R(t) \geq F_r(t)$ se $t \geq a$ e $F_R(t) \leq F_r(t)$ se $t \leq a$.

PROVA: Mostraremos que se *F* não satisfizer as desigualdades, então *F* não é extensão do produto associada a *f*. Consideremos o caso em que existe $b > a$ tal que $F(b) > F_R(b)$. Os outros casos são similares.

Como $F(b) > F_R(b)$, existe uma partição $p = \{a = b_0, b_1, \ldots, b_k = b\}$ para $[a, b]$ tal que $F_R(b) \leq R_p(a, b) < F(b)$, onde $R_p(a, b) = H_1(b_1 - a) + H_2(b_2 - b_1) + \ldots + H_k(b - b_{k-1})$. Como $F(a) = 0$, podemos escrever

$$F(b) = [F(b_1) - F(a)] + [F(b_2) - F(b_1)] + \ldots + [F(b) - F(b_{k-1})].$$

A desigualdade $R_p(a, b) < F(b)$ mostra que existe *j* entre *1* e *k* tal que $H_j(b_j - b_{j-1}) < F(b_j) - F(b_{j-1})$. Tomando

$$M = \frac{H_j}{2} + \frac{F(b_j) - F(b_{j-i})}{2(b_j - b_{j-i})}$$

tem-se

$$M(b_j - b_{j-1}) = \frac{H_j(b_j - b_{j-1}) + F(b_j) - F(b_{j-1})}{2} < F(b_j) - F(b_{j-1}).$$

Como $M > H_j = sup\{f(x);\ x \in [b_{j-1}, b_j]\}$, segue-se que F não é extensão do produto associada a f.

15 - TEOREMA: *Se f for integrável, então a única extensão do produto associada a f que se anula em a é*

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx .$$

PROVA: Decorre diretamente da proposição 14.

Nota: O teorema 15 caracteriza a integral como extensão do produto.

QUESTÕES MATEMÁTICAS, CULTURAIS E EDUCACIONAIS

EVOLUÇÃO NATURAL: O problema do deslocamento conduz naturalmente ao problema da extensão do produto. Como o deslocamento é uma extensão do produto e também é uma primitiva da velocidade é natural conjeturar se este fato é geral. A resposta é o teorema de extensão do produto. Assim, esta abordagem conduz ao Cálculo Integral de uma forma natural por meio do esquema *expectativa* → *conjectura* → *resultado* que, acreditamos, sintetiza uma maneira promissora de abordar a Matemática. Isto possibilita que o professor escolha um conceito definido por um produto $k(t - s)$ que seja importante para os estudantes. Usando este conceito como contexto ele pode chegar à integral estudando situações realistas em que o fator k é substituído por uma função f. Quando pode ser usado este procedimento tem resultados positivos, como foi o caso de Macêdo [M] que, trabalhando sob nossa orientação em sua dissertação de Mestrado, contextualizou a integral em um problema de estoque que é um conceito importante para Administração de Empresas.

TEMAS DE REFRÊNCIA: Como em geral o professor é leigo na futura área de conhecimento de seus alunos, é necessário usar tópicos bem conhecidos por alunos e professor como temas de referência. A abordagem convencional usa a área como tema de referência para a integral e a tangente para a derivada. Como "a tangente não é a derivada da área”, o uso destes temas esconde a inversão da derivação que é fundamental em nossa abordagem. Por este motivo nós preferimos o deslocamento e a velocidade que além de deixarem a inversão muito clara têm a vantagem de ser associados à cultura do automóvel que influencia fortemente o mundo há mais de 80 anos.

LOCAL “VERSUS” GLOBAL: A integral definida pensada como função do extremo superior foi decisiva neste trabalho. Ela permitiu estudar a função

$$F(t) = \int_a^t f(s)ds \text{ no lugar do número } \int_a^b f(s)ds$$

que é a área usada na abordagem clássica. Desta forma foi possível usar os recursos da derivação na função *F*. Salvo o teorema do valor médio, estes são recursos locais que estudam a função “nas vizinhanças do ponto *t*”. Para estudar a área, a abordagem clássica fixa o ponto $t = b$. Este procedimento obriga a estudar a função *F* no intervalo $[a, b]$ o que recai em recursos de natureza global. Como a “Matemática global” é mais difícil que a “Matemática local”, entende-se porque nossa abordagem é mais simples que a abordagem clássica.

RELAÇÃO COM A LITERATURA: As idéias que deram origem ao presente trabalho apareceram em [V1], [VM] e [V2]. Estas idéias foram se aperfeiçoando e deram origem a participações em congressos. Parte destas idéias foi usada em [M]. Após a conclusão de [V2], identificamos semelhanças com estudos de área apresentados no capítulo XIV de [G]. No capítulo XV daquele livro a área é reapresentada por meio de somas de Riemann.

BIBLIOGRAFIA

[G] - Granville, W e outros. Elements of the Differential and Integral Calculus - Ginn and Company, New York, 1941.

[L] – Lang, Serge. Analisys - Addison - Wesley, Massachusetts, 1968.

[Li] - Lima, Elon. Curso de Análise Vol 1. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1982.

[M] - Macêdo, Arnaldo. A Integral e o Estoque; um Modelo Matemático Motivador, para Cursos de Administração - Dissertação de Mestrado, Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro, 2001.

[V1] Valladares, Renato J.C. A Integral de Riemann sem as Somas de Riemann; Será isto uma Ousadia? - Relatório interno de pesquisa nº 4/99, Universidade Santa Úrsula 1999.

[V2] - Valladares, Renato J.C. – Do Produto à Integral – XI CIAEM, Anais do evento – Blumenau, 2003.

[V3] – Valladares, Renato J.C. Cálculo – Livro no prelo.

[V4] – Valladares, Renato J.C. The integral as a product extension. Artigo em preparação.

[VM] - Valladares, Renato J.C. e Muniz, Paulo P. A Integral sem as Somas de Riemann - XXIII CNMAC, Resumo das Comunicações, pg. 125 - Santos, 2000.